

II.1. Position du problème

Dans le présent travail, nous avons étudié les effets des paramètres physiques et géométriques sur la convection naturelle dans une cavité cylindrique verticale partiellement annulaire. Nous considérons pour cela, une cavité cylindrique verticale fermée de hauteur H et de rayon extérieur r_e maintenue à une température T_f , contenant symétriquement, un cylindre vertical à sa base, de hauteur $h < H$ et de rayon r_i , maintenue à une température T_c . L'espace entre les deux cylindres est rempli avec un fluide Newtonien incompressible de viscosité cinématique ν et de diffusivité thermique α . La paroi supérieure et la paroi inférieure sont adiabatiques et les deux cylindres engendrent un gradient horizontal de température. Dans cette étude, en première étape, nous avons étudié l'effet du rapport des hauteurs sur la structure de l'écoulement et sur la distribution de température. Pour chaque valeur du rapport de hauteur (X) nous avons fixé le rapport des rayons (K) à 2 et nous avons fait varier le nombre de Rayleigh de 10^3 à 10^5 , pour un rapport de forme $A=1$ et un nombre de Prandtl égale à 7,0, et en deuxième étape, nous avons étudié l'influence de la courbure (K) sur la structure de l'écoulement et sur la distribution de température. Pour chaque valeur du rapport de rayons nous avons fixé le rapport de hauteur (X) à 1/2 et nous avons fait varier le nombre de Rayleigh de 10^3 à 10^5 , pour un nombre de Prandtl=7,0,

Les écoulements susceptibles d'être développés dans cette cavité sont gérés par les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement et de l'énergie. Il s'agit de déterminer la répartition de vitesse, de pression, de température à partir d'un code numérique utilisé pour résoudre notre système d'équations. Ce code est fondé sur la méthode des volumes finis en utilisant l'algorithme SIMPLER.

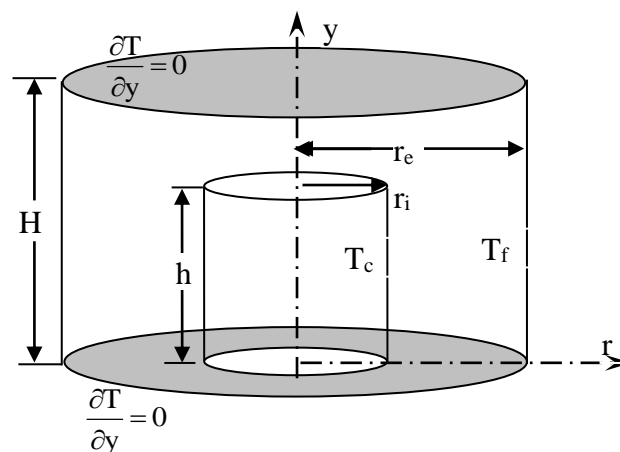


Fig.II.1: Modèle physique

II.2. Les équations de mouvement.

II.2.1. Hypothèses simplificatrices.

Les principales hypothèses prises en compte dans cette étude sont les suivantes:

- 1- L'écoulement de convection naturelle est provoqué par les forces de poussées thermiques et reste laminaire.
- 2- L'écoulement est bidimensionnel et axisymétrique suivant l'axe vertical Oy.
- 3- Le fluide est Newtonien, incompressible et ses propriétés physiques sont constantes la viscosité cinématique ν et de diffusivité thermique α sont constantes sauf pour la masse volumique qui dépend de sa température (approximation de Boussinesq) selon la relation suivante:

$$\rho(T) = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (\text{II},1)$$

- 4- Les vitesses restant faibles, le travail des forces de pression et la production de chaleur par dissipation visqueuse sont négligeables.

Avec ces hypothèses, le mouvement du fluide ainsi que les répartitions de température T dans le milieu sont régies par les équations dimensionnelles suivantes:

Equation de continuité:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \cdot u) + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II},2)$$

Equation de quantité de mouvement radial (suivant Or):

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (\text{II},3)$$

Equation de quantité de mouvement axial (suivant Oy):

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g \left(\frac{\rho_\infty - \rho}{\rho} \right) \quad (\text{II},4)$$

Equation d'énergie:

$$u \frac{\partial T}{\partial r} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II},5)$$

II.3. Adimensionnement

II.3.1. Les grandeurs de référence:

Les grandeurs caractéristiques utilisées pour adimensionner le problème sont: la largeur de la cavité L, la vitesse, la pression et la température. Étant donné la symétrie angulaire, le problème est considéré bidimensionnel.

Notre modèle mathématique est mis sous forme adimensionnelle en se rapportant aux références suivantes:

$L_r = r_e - r_i$: largeur de la cavité comme longueur de référence

$V_r = \frac{v}{L_r}$: comme vitesse de référence

$P_r = \frac{\rho v^2}{L_r^2}$: comme pression de référence

$\Delta T = T_c - T_f$: écart de température entre parois chaude et froide comme écart de température de référence.

Par ailleurs, les températures de référence sont les valeurs moyennes

$$T_0 = \frac{T_c - T_f}{2}$$

En fonction des choix précédents, les grandeurs de référence associées au temps

$\frac{L_r}{V_r}$: temps de référence

On en déduit la forme adimensionnelle des variables de notre problème:

$$(R, Y) = \frac{(r, y)}{L_r} \Rightarrow (R, Y) = \frac{(r, y)}{(r_e - r_i)}$$

$$(U, V) = \frac{(u, v)}{V_r} \Rightarrow (U, V) = \frac{(u, v)L_r}{v} \Rightarrow (U, V) = \frac{(u, v)(r_e - r_i)}{v}$$

$$P = \frac{p}{P_r} \Rightarrow P = \frac{pL_r^2}{\rho v^2} \Rightarrow P = \frac{p(r_e - r_i)^2}{\rho v^2}$$

$$\theta = \frac{(T - T_0)}{\Delta T} \Rightarrow \theta = \frac{(2T - T_c - T_f)}{2(T_c - T_f)}$$

En tenant compte de ces adimensionnements, notre modèle mathématique devient:

Equation de continuité:

$$\frac{\partial(RU)}{R\partial R} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (\text{II},6)$$

Equation de quantité de mouvement radial (suivant Or):

$$U \frac{\partial U}{\partial R} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial R} + \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} - \frac{U}{R^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \quad (\text{II},7)$$

Equation de quantité de mouvement axial (suivant Oy):

$$U \frac{\partial V}{\partial R} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{Ra_T}{Pr} \theta \quad (\text{II},8)$$

Equation d'énergie:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial R} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial R} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{II},9)$$

II.3.2. Les paramètres caractéristiques du problème:

Les paramètres caractéristiques qui interviennent dans les équations adimensionnelles ci-dessus et dont les valeurs conditionnent les transferts de chaleur dans la cavité sont des paramètres géométriques:

- Le facteur de forme qui caractérise l'allongement de la cavité:

$$A = \frac{H}{L_r}$$

H: la hauteur du cylindre extérieur.

$$a = \frac{h}{L_r}$$

h: la hauteur du cylindre intérieur.

- Le rapport des hauteurs qui caractérise la variation de la hauteur du cylindre intérieur:

$$X = \frac{h}{H}$$

- Le rapport des rayons qui caractérise la courbure des parois verticales:

$$K = \frac{r_e}{r_i}$$

Des paramètres physiques:

- Le nombre de Rayleigh:

$$Ra = \frac{g\beta\Delta TL_r^3}{\nu\alpha}$$

- Le nombre de Prandtl:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

Par ailleurs, les transferts de chaleur sont représentés par le nombre de Nusselt. Ce nombre adimensionnel se calcule en fonction des grandeurs locales de température le long de chaque paroi verticale

$$Nu = \frac{-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} L_r}{\lambda \Delta T} = -\frac{\partial \theta}{\partial R}$$

$$\overline{Nu} = \frac{1}{A} \int_0^A Nu(R=1, Y) dY \quad (\text{II},10)$$

II.4. Les conditions aux limites.

En tenant compte de l'adimensionnement des grandeurs physiques, les conditions aux limites sont:

$$R = \frac{1}{K-1} \quad \theta = \frac{1}{2} \quad U=V=0$$

$$R = \frac{K}{K-1} \quad \theta = -\frac{1}{2} \quad U=V=0$$

$$Y=0, A \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad U=V=0$$

$$Y=XA \text{ et } 0 \leq R \leq \frac{1}{K-1} \quad \theta = \frac{1}{2} \quad U=V=0$$

Vu que notre domaine d'étude est symétrique par rapport à l'axe vertical (Oy), (Fig.II.2), le calcul peut s'effectuer sur la moitié de la zone contenant le fluide. Les conditions aux limites au niveau de l'axe de symétrie (Oy) deviennent:

$$\frac{\partial \theta}{\partial R} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial R} = 0 \quad U=0$$

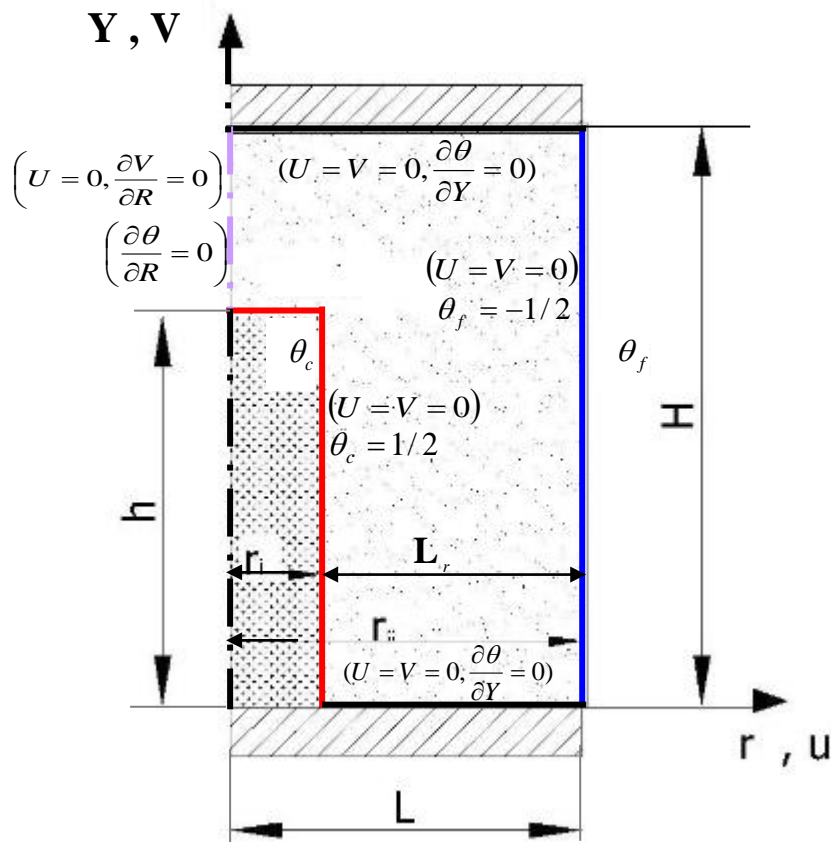


Fig.II.2: Configuration géométrique du modèle physique d'une cavité annulaire et conditions aux limites

II.5. Méthode numérique de résolution.

Le modèle numérique retenu pour résoudre le système d'équations (II.6)-(II.9), est fondé sur la méthode des volumes finis développée par Patankar [1].

Cette méthode s'appuie sur une discrétisation du domaine de calcul en différents nœuds, chacun d'entre eux étant entouré d'un volume élémentaire (Fig.II.3) sur lequel on intègre les équations aux dérivées partielles (II.6)-(II.9).

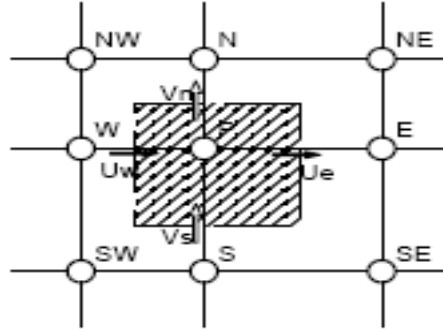


Fig.II.3:Volume de contrôle

L'intégration de l'équation (II.6)-(II.9) sur le volume de contrôle représenté par la figure II.3 mène à une relation algébrique entre les valeurs de la variable ϕ au centre de la maille et sur les faces repérées, par convention, les situant par rapport aux points cardinaux E (Est), W (Ouest), S (Sud), N (Nord).

$$A_P \phi_P = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + B \quad (\text{II.11})$$

- La variable ϕ peut être U, V, θ .
- B: représente le terme source volumique.

Les coefficients, A_E , A_W , A_N , A_S tiennent compte de la convection et de la diffusion à travers les quatre faces du volume de contrôle et sont déterminés à partir d'un schéma hybride.

La méthode des volumes finis a pour avantage de garder les équations sous leur forme primitive contrairement aux méthodes fondées sur une formulation par fonction de courant-vorticité.

Le problème du couplage pression-vitesse est résolu en introduisant un champ de vitesses supposé connu permettant de déterminer le champ de pression à partir de l'équation de continuité. On utilise alors une procédure itérative de correction de pression et de vitesse de manière à ce que l'équation de continuité soit satisfaite. Nous avons utilisé pour cela l'algorithme SIMPLER dont les grandes lignes sont présentées ci-après.

Cet algorithme nécessite que la discrétisation des champs de vitesse et de pression ne se fasse pas sur le même maillage. On doit ainsi définir:

- Un maillage principal centré pour calculer les variables P ainsi que θ .
- Un maillage décalé pour calculer U et V , dont les nœuds sont localisés à mi-distance de ceux du maillage principal, comme l'indique la figure II.4.

Chaque composante U ou V du vecteur vitesse est décalée seulement suivant sa propre direction. Dans le maillage principal et décalé, les propriétés de conservation restent vérifiées.

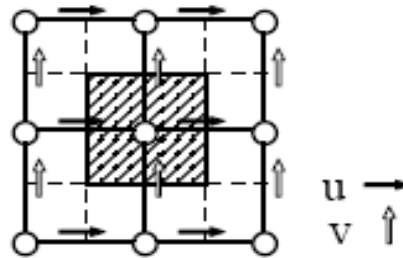


Fig.II.4 Maillage utilisé dans l'algorithme SIMPLER

II.5.1. Algorithme SIMPLER.

L'algorithme SIMPLER est une amélioration de l'algorithme SIMPLE (Semi-Implicit Pressure Linked Equation) initialement développé par Patankar [1]. Il est basé sur l'utilisation d'un champ de vitesse estimé (U^* , V^*) qui permet une première évaluation du champ de pression P^* avec laquelle les équations de quantité de mouvement sont résolues pour obtenir les composantes U et V .

Les grandes lignes de l'algorithme SIMPLER dont une présentation plus détaillée est donnée, peuvent se résumer comme suit:

- 1- Donner un champ de vitesse initial.
- 2- Calculer les coefficients pour les équations de quantité de mouvement sans gradient de pression et déterminer les pseudo-vitesses U^* et V^* .
- 3- Calculer les coefficients de l'équation de pression déduite de l'équation de continuité et la résoudre pour obtenir un champ de pression.
- 4- Résoudre les équations de quantité de mouvement en U et V pour obtenir le champ de vitesse.
- 5- Résoudre l'équation en P (erreur effectuée sur la pression).
- 6- Corriger le champ de vitesse sans corrigé le champ de pression
- 7- Résoudre l'équation de température.
- 8- Vérifier les critères de convergence, sinon reprendre le calcul à partir de l'étape 3.
- 9- Vérifier le temps final, sinon reprendre à partir de l'étape 2.

II.5.2. Résolution des équations et convergence

Il s'agit de résoudre aux différents stades du calcul des systèmes de la forme :

$$A_P \phi_P = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + B \quad (\text{II.11})$$

La méthode de résolution classique consiste à résoudre ces équations en bloc sur une ligne (à R ou Y constant) qui se déplace de façon à balayer l'ensemble du domaine de calcul. Cette méthode est itérative et consiste à résoudre, à chaque itération, N systèmes tridiagonaux où N est le nombre de lignes dans la direction de balayage.

Le test d'arrêt de processus itératif est fondé sur l'observation des résidus des équations de quantité de mouvement, et de la température. Ces résidus peuvent être définis localement pour chaque variable Φ :

$$R_\phi = \sum_i A_i \phi_i + B - A_P \phi_P \quad (\text{II.12})$$

Le critère d'arrêt des itérations est:

$$\left| \sum_{i,j} R_{\phi,i,j} \right| \leq \varepsilon$$

ε étant un infiniment petit fixé en fonction de la précision de convergence voulue.

Nous avons obtenu des résultats avec différentes précisions de convergence, et nous avons constaté, sur les profils de vitesse vertical (V) par exemple (Fig.II.5), que les solutions n'évoluent pratiquement plus dès $\varepsilon=10^{-4}$, car les trois courbes à partir de $\varepsilon = 10^{-4}$ jusqu'à $\varepsilon = 10^{-6}$ sont identiques. Nous avons donc gardé cette valeur pour la suite de nos calculs.

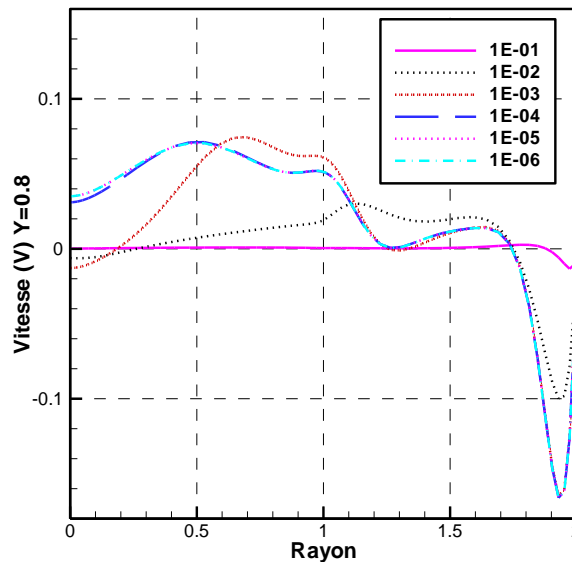


Fig.II.5: Profils de vitesse verticale (V) à différentes étapes itératives pour un maillage 58x58

II.6. Le maillage

On a d'adopté un maillage resserré au niveau des parois. Toutefois, d'autres zones à forts gradients peuvent apparaître au sein de l'écoulement en des positions difficiles à prédire à l'avance (d'autant qu'elles peuvent varier dans le temps); comme nous le verrons au chapitre suivant. Cela pourrait justifier l'utilisation d'un maillage uniforme mais on ne pourrait alors obtenir une représentation fiable du transfert thermique qu'avec un maillage très fin imposé à l'ensemble du domaine.

Nous avons donc finalement choisi un maillage irrégulier évoluant suivant une loi exponentielle tel qu'il est représenté sur la figure II.6.

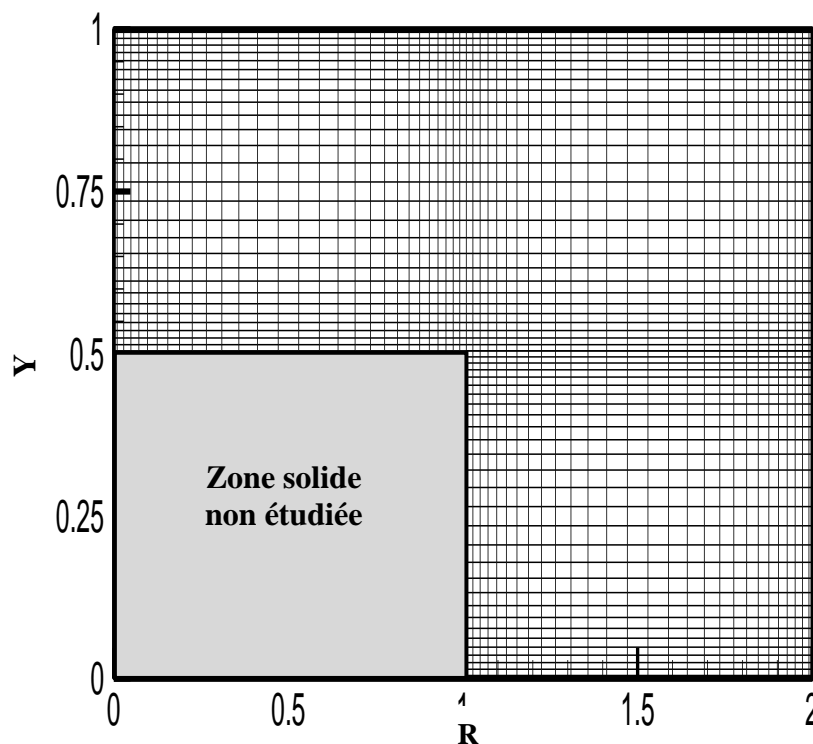


Fig. II.6.: Maillage irrégulier pour une cavité annulaire $A=1$, $X=0.5$, maillage (58×58)

Pour étudier la sensibilité de la solution à la taille du maillage, nous avons comparé plusieurs profils de la vitesse vertical $V = f(R)$ pour différents maillages, (30×30) , (45×45) , (58×58) , (82×82) , et nous avons constaté, sur les profils de vitesse vertical pour $Y=0.5$, que les résultats sont exacte a partir d'un maillage (58×58) , car les deux courbes de (58×58) et (82×82) sont presque confondus ,figure (II.7).

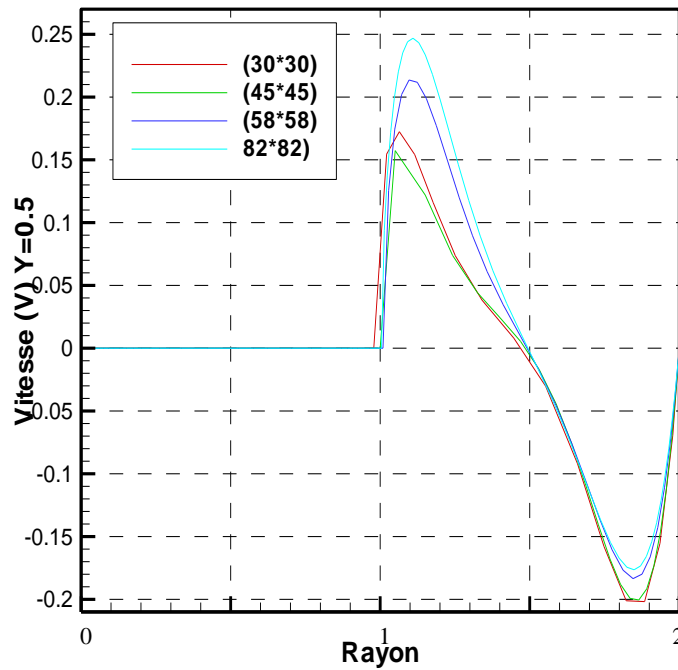


Fig.II.7: Profils de vitesse verticale à différents maillages pour $Ra=10^5$, $Pr=7$

II.7. Validation:

II.7.1 Validation quantitative :

Nous avons testé la validité de notre code de calcul en convection naturelle thermique pour des cavités annulaires dans des configurations déjà étudiées dans la littérature.

Nous avons également testé notre code de calcul sur des cavités annulaires en comparant nos résultats à ceux de R.Kumar et al [6], G. De Vahl Davis et al [1] et de Thomas H Schwab et al [2] pour différentes valeurs de Prandtl dans le cas d'un écoulement de convection naturelle thermique pure qui correspond à $X=h/H=1$.

Tableau II.1. Comparaison du nombre de Nusselt moyen pour la convection naturelle thermique dans une cavité annulaire pour $A=10$ et $K=2$ et $X=1.0$ $Pr=0.7$.

Nombre de Rayleigh	Présent travail	R.Kumar et al.[6]	De Vahl Davis et al.[1]
10^4	2.361	2.355	2.333
5.10^4	3.702	3.718	3.758
10^5	4.535	4.558	4.568

Tableau II.2. Comparaison du nombre de Nusselt moyen pour la convection naturelle thermique dans une cavité annulaire pour $A=1$, $K=2$, $X=1.0$ et $Ra=10^4$.

Le nombre de Prandtl	Présent travail	Thomas H Schwab et al [24]
0.73	6.12	6.13
1.00	6.20	6.17
7.00	6.36	6.36
25.00	6.31	6.31

La comparaison est satisfaisante et l'erreur relative commise sur le nombre de Nusselt moyen par rapport aux valeurs proposées par les différents auteurs est de l'ordre de 1% (Table II.1 et Table II.2).

II.7.2 Validation qualitative :

Les figures (II.8) et (II.9) montrent qu'il y a un bon accord qualitatif entre les résultats que nous avons obtenus et ceux de Kulmar [6], ce qui nous a permis de valider notre modèle numérique.

Dans cette partie notre validation consiste à comparer les champs de vitesse et la distribution de température avec les travaux de R.Kumar et al.[6].

c)- Présent travail:

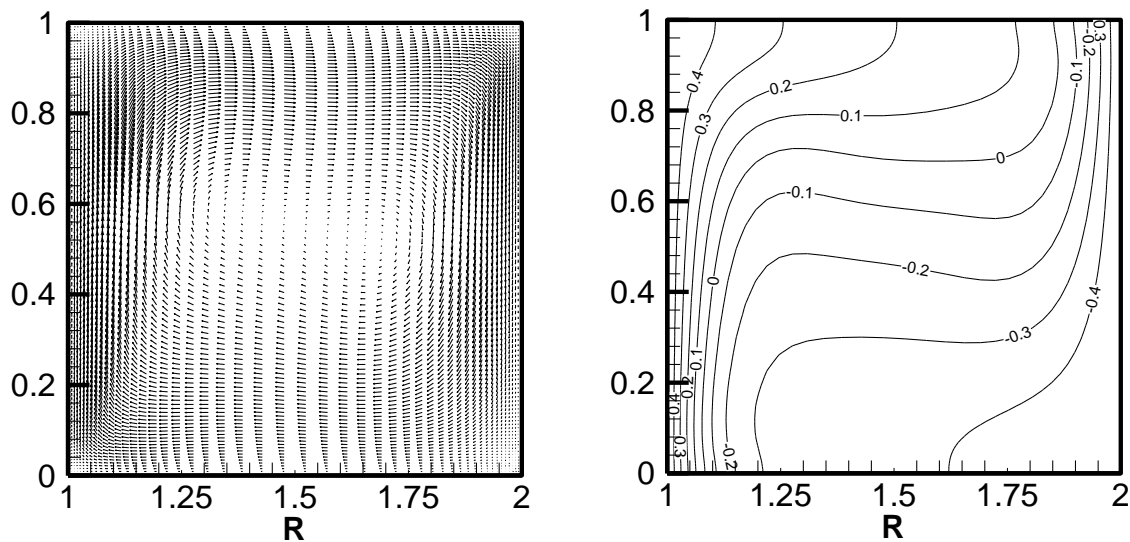
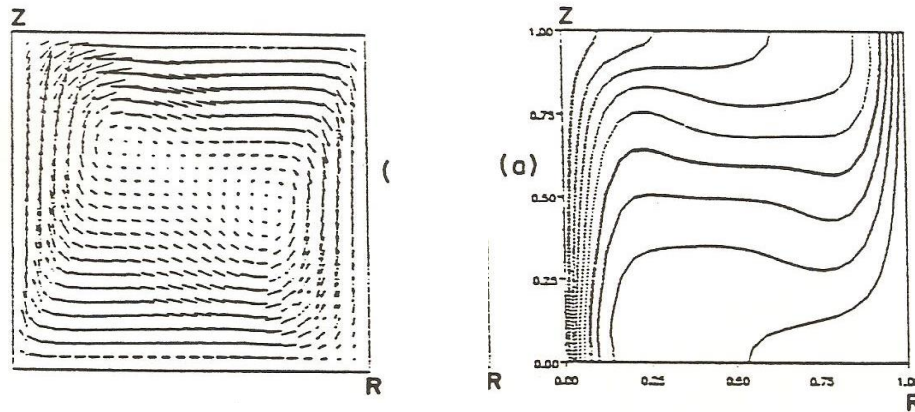


Fig.II.8:Champ de vitesse et isotherme pour $A=1$, $X=1$, $K=2$, $Pr=0.7$, $Ra=5 \times 10^4$

d)- Travail de R.Kumar et al.[6]:Fig.II.9:Champ de vitesse et isotherme pour $A=1$, $K=2$, $Pr=0.7$, $Ra=5 \times 10^4$

L'étude comparative que nous avons menée par confrontation des résultats obtenus à ceux donnés par d'autres travaux, cela nous permet de valider notre code de calcul ainsi que le modèle mathématique proposé pour le problème.

II.8. Résultats et discussions des résultats.**II.8.1 Domaine d'étude:**

Nous proposons d'étudier le transfert de chaleur par convection naturelle dans une cavité cylindrique verticale partiellement annulaire. Cette étude a pour but principal de répondre à des questions relatives aux applications industrielles et d'étudier le phénomène de la convection naturelle dans des cavités partiellement ou totalement annulaire ayant diverses formes et dimensions.

II.8.2. Choix des principaux paramètres de configuration:

La structure de l'écoulement, le champ thermique, ainsi que le transfert de chaleur à travers la paroi chaude sont examinés dans cette section.

Dans cette étude pour examiner l'effet de la géométrie de la cavité, nous avons fait varier le rapport des hauteurs X ($0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$) et le rapport des rayons K ($2, 5, 10$) pour un nombre de Prandtl fixé à 7.0 (cas de l'eau). Les résultats sont présentés pour quatre valeurs de nombre de Rayleigh ($Ra=10^3, 10^4, 10^5$ et 10^6) pour chaque rapport de hauteur et chaque rapport des rayons.

Nous présenterons des champs de vitesses et de température et des valeurs quantitatives du transfert de chaleur (nombre de Nusselt) pour différentes paramètres qui caractérisent le problème de transfert de chaleur, qui sont les paramètres physiques (Ra) et les paramètres géométriques (X, K) correspondant aux différentes solutions obtenues en régime stationnaire et instationnaire.

II.8.3. Influence du nombre de Rayleigh:

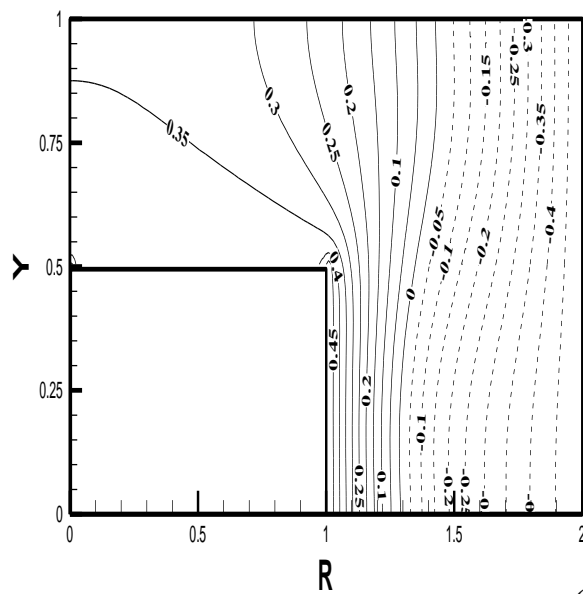
Le paramètre principal qui gouverne l'écoulement convectif est le nombre de Rayleigh qui compare les forces de flottabilité (force d'Archimède) aux forces visqueuses, il est proportionnel au gradient de température appliqué.

II.8.3.1. Structure d'écoulement et distribution de température:

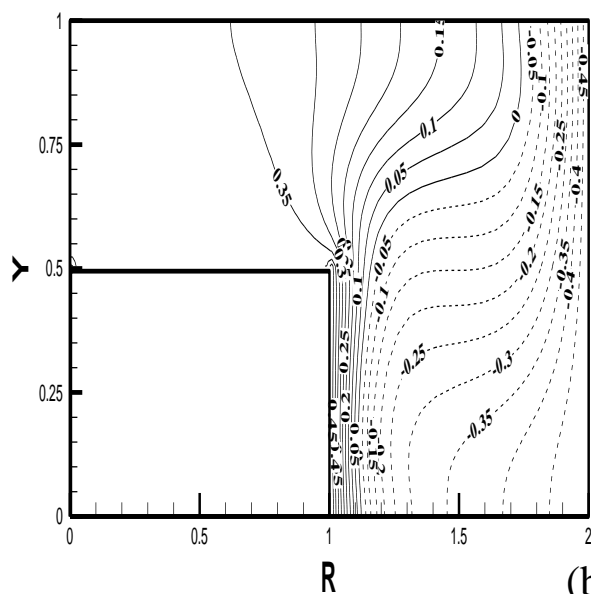
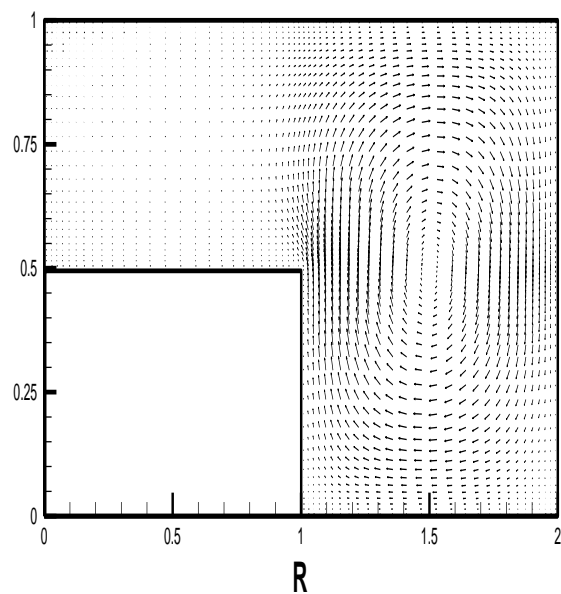
Les champs de température ainsi que les champs de vitesses sont montrés dans les figures (II.10) pour un nombre de Rayleigh variant entre 10^3 et 10^6 .

Ainsi pour $Ra=10^3$, les sollicitations thermiques sont assez faibles pour pouvoir varier la densité du fluide et provoquer le mouvement des particules, le transfert de chaleur s'effectue alors uniquement par conduction thermique c'est pourquoi on observe une stratification horizontale des isothermes (fig.II.10a). Lorsque les forces de poussées thermiques commencent à devenir plus importantes avec l'augmentation du nombre de Rayleigh de l'ordre de $Ra=10^4$, on constate dans la figure (fig.II.10b) des isothermes qui commencent à se tordre au fur et à mesure qu'on s'approche de l'espace annulaire où les particules s'accélèrent en circulant dans le sens des aiguilles d'une montre, ascendantes près de la paroi chaude et descendante près de la paroi froide. Nous remarquons que les isothermes se resserrent à côté des parois verticales du cylindre où le gradient de température est important. L'augmentation du nombre de Rayleigh de $Ra=10^5$ jusqu'à $Ra=10^6$ engendre un gradient de température très fort aux voisinages des parois verticales (fig.II.10c et 10d), ce qui signifie un échange thermique convectif croissant avec l'accroissement du nombre de Ra . Effectivement lorsqu'on analyse le champ de vitesse, on constate que pour $10^3 \leq Ra \leq 10^4$, les vitesses sont faibles au milieu de la cavité ($Y=0.5$ et $R=1.5$) et presque négligeable dans l'intervalle $0 < R < 1$ (fig.II.10a et 10b). Par contre, l'écoulement commence à se développer avec l'augmentation du nombre de Rayleigh ($10^5 \leq Ra \leq 10^6$), où les particules de fluide s'accélèrent précisément au voisinage des parois et les vitesses commencent à devenir plus importantes sur la partie supérieure du cylindre intérieur (fig.II.10c et 10d).

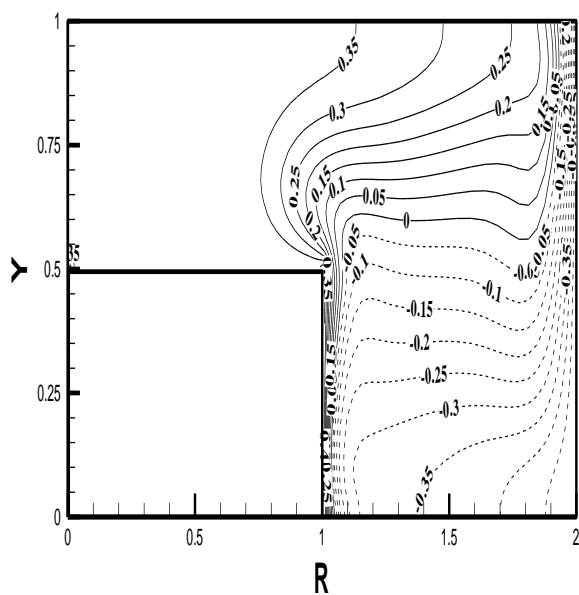
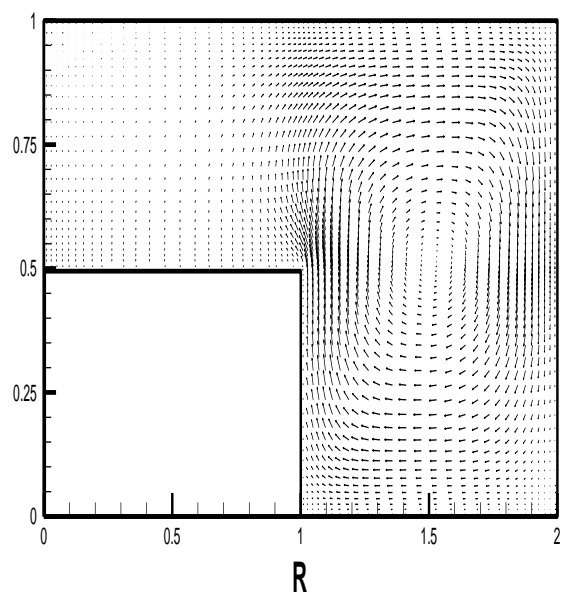
On peut également constater à partir de la figure III-3 que les vitesses de l'écoulement sont de plus en plus intenses en s'approchant des parois, principalement lorsqu'on fait accroître le nombre de Rayleigh, et donc les vitesses sont toujours maximales au voisinage des parois verticales. Donc, l'augmentation du nombre de Rayleigh à partir $Ra \geq 10^4$ accentue l'effet convectif du transfert de chaleur (fig.II.11).



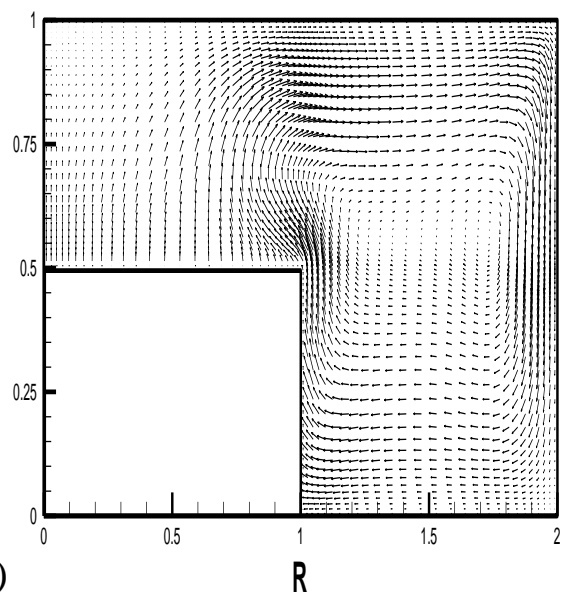
(a)



(b)



(c)



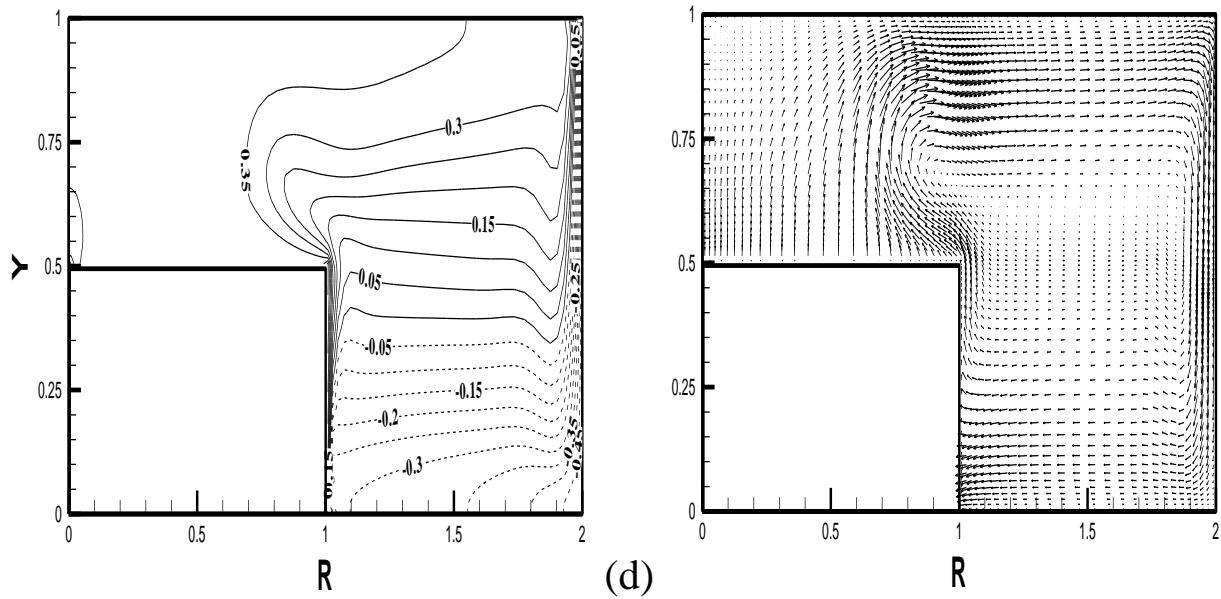


Fig.II.10: Effet du nombre de Rayleigh sur le champ de température et le champ de vitesse, $Ra=10^3$ (a), $Ra=10^4$ (b), $Ra=10^5$ (c), $Ra=10^6$ (d) ($A=1$, $K=2$, $X=0.5$, $Pr=7.0$)

II.8.3.2. Profils des températures et des vitesses:

Le profil vertical de température au centre de la cavité ($Y=0.8$) pour différents nombres de Rayleigh est donné dans la figure (II.11). Le fluide est chaud au voisinage de la surface du cylindre intérieur et il est froid du côté de la paroi du cylindre extérieure.

Pour un nombre de Rayleigh ayant une valeur de 10^3 le profil de température représente une certaine linéarité dans les deux zones $0 < R < 1$ et $1 < R < 2$. Cela est expliqué par le fait que jusqu'à cette valeur le transfert de chaleur est effectué seulement par conduction.

Cependant, on constate à travers les profils de température, lorsque Ra augmente au-delà de la valeur 10^4 , que la variation de température tend à s'affaiblir dans la zone annulaire ($1 < R < 1.9$), due à une stratification verticale de température provoquée par un écoulement convectif intense au fur et à mesure que le nombre de Rayleigh augmente (Fig.II.10c et 10d). Au-delà de cette zone, au niveau de la paroi, on constate la présence d'un gradient de température horizontale intense due à un transfert thermique important. Effectivement, on remarque que les isothermes deviennent de plus en plus resserrées lorsque Ra augmente. La première différence qui apparaît par rapport au cas précédent est la présence sur ces profils de deux inflexion locaux ($R \sim 1.9$ et $R \sim 1.95$) qui traduisent l'augmentation du gradient de température entre le fluide et la paroi froide du cylindre extérieur.

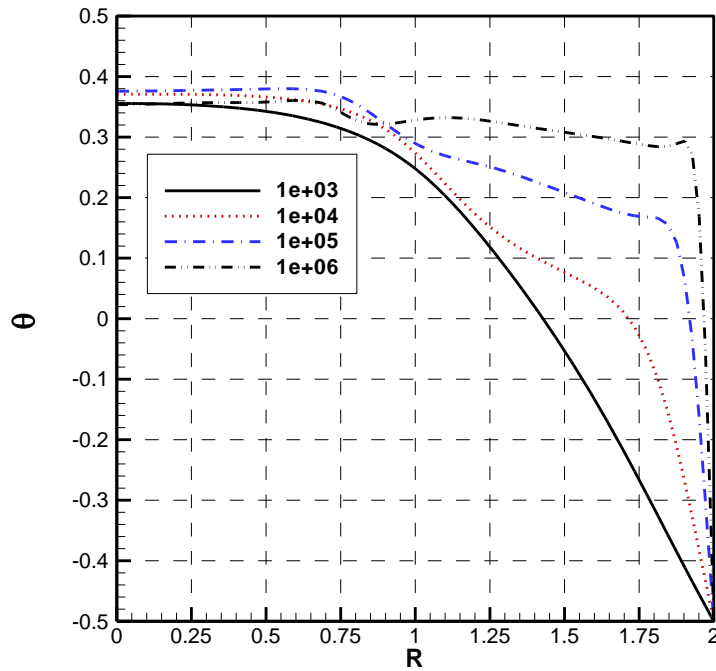


Fig.II.11: profil de la température statique à $Y=0.8$, $X=0.5$, $K=2$ pour différents nombre de Rayleigh

Ces courbes montrent, par leur allure, l'effet du régime convectif sur la distribution de température dans la cavité.

Ces gradients de température (couches limites thermique) sont bien associées à l'écoulement du fluide qui se fait principalement dans les couches limites au voisinage des parois comme le confirme l'observation des profils de vitesses verticales (V) et de vitesses horizontales (U) pour $Ra=10^3$ jusqu'à $Ra=10^6$ (Fig.II.12a) et (Fig.II.12b), le mouvement y subit une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre. La vitesse verticale s'annule à $R=1,5$ quelle que soit la valeur de Ra par contre lorsque l'écoulement est étouffé pour $Ra=10^3$ et $Ra=10^4$ les vitesses verticales sont nulles dans l'intervalle $R \in [0, 0.5]$. Aux niveaux des parois (couche limite dynamique), on constate que les vitesses verticales croient avec l'augmentation du nombre de Ra et s'annulent au contact de la paroi froide (condition de non-glissement).

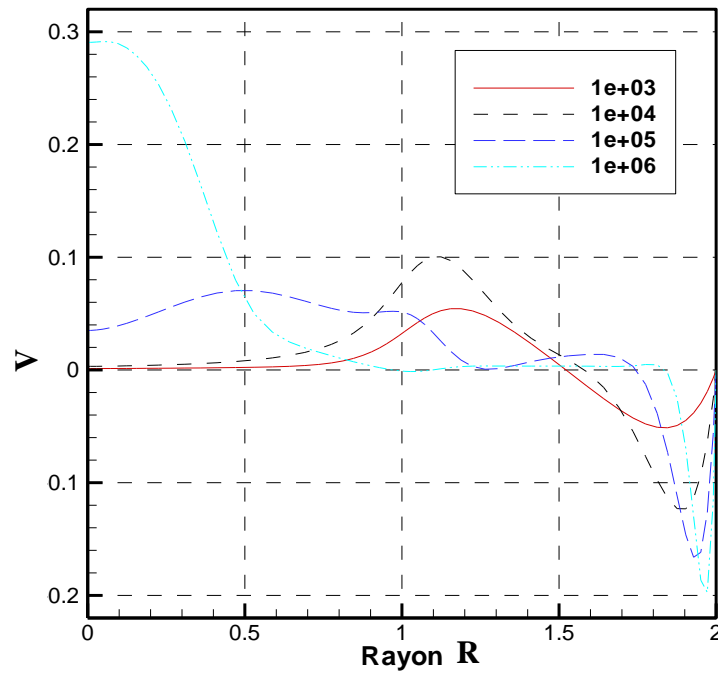


Fig II.12a: profil de la vitesse moyenne (V) à $Y=0.8$, $X=0.5$, $K=2$ pour différents nombre de Rayleigh

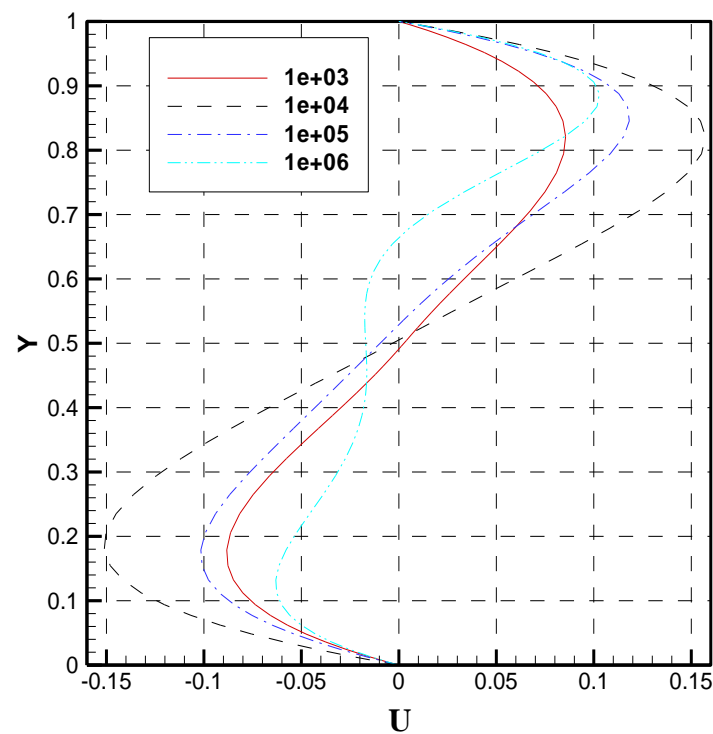


Fig II.12b: profil de la vitesse moyenne (U) à $R=1.65$, $X=0.5$, $K=2$ pour différents nombre de Rayleigh

D'autre part, au niveau de l'axe de symétrie, les vitesses verticales augmentent avec lorsque le nombre de Rayleigh et atteint un maximum $V \sim 0.3$ ($Y=0.8$, $R=0$) pour un nombre de Rayleigh égal à 10^6 .

II.9. Influence du rapport de hauteur:

Le rapport des hauteurs (X) est une grandeur adimensionnelle qui caractérise la géométrie de la cavité et qui représente le rapport de la hauteur du cylindre intérieur à la hauteur du cylindre extérieur.

II.9.1. Structure d'écoulement et distribution de température

Pour mettre en évidence l'effet du rapport des hauteurs des deux cylindres, nous avons considéré différents rapports de hauteurs entre $0 \leq X \leq 1$ pour $Ra=10^5$, $K=2$, $A=1.0$, $Pr=7.0$.

En observant les isothermes de la figure (II.13a) on constate que le flux de chaleur est verticale est intense au niveau de la paroi chaude, mais dès qu'on s'éloigne de cette dernière ($Y=0.2$), le flux de chaleur devient radial le long et à proximité de l'axe verticale ($0 < R < 0.5$). Cela provoque un écoulement intense sous forme de panache.

Dans le reste de la cavité le gradient de température s'affaiblit avec une stratification thermique verticale où le flux de chaleur devient descendant, sauf au niveau de la paroi froide où le flux de chaleur redevient horizontal. Lorsque le nombre de Rayleigh continue à augmenter et atteint $Ra=10^5$, le flux de chaleur ascendant est serré au centre de la cavité le long de l'axe vertical avec un gradient de température faible entouré d'un gradient de température horizontale très intense, mais le reste de la cavité possède une stratification de thermique verticale avec un gradient de température faible ce qui provoque une zone de fluide où les particules sont ralenties (Fig II.13b).

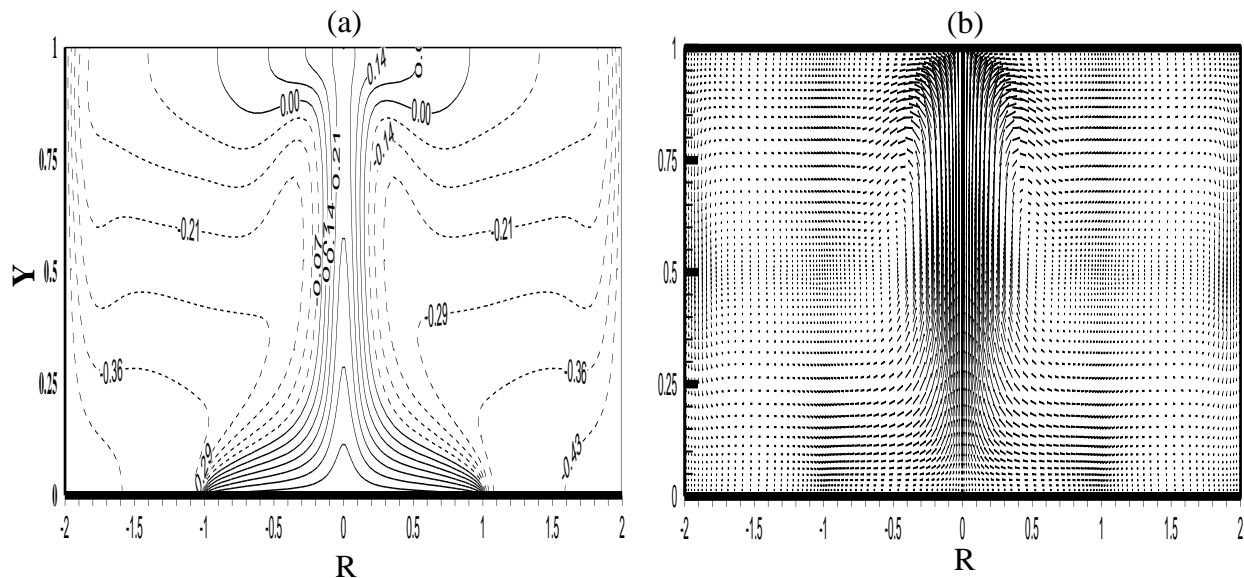


Fig.II.13: Isotherme (a) et champ de vitesses (b) pour $X=0.0$
($Ra=10^5$, $K=2$, $Pr=7.0$)

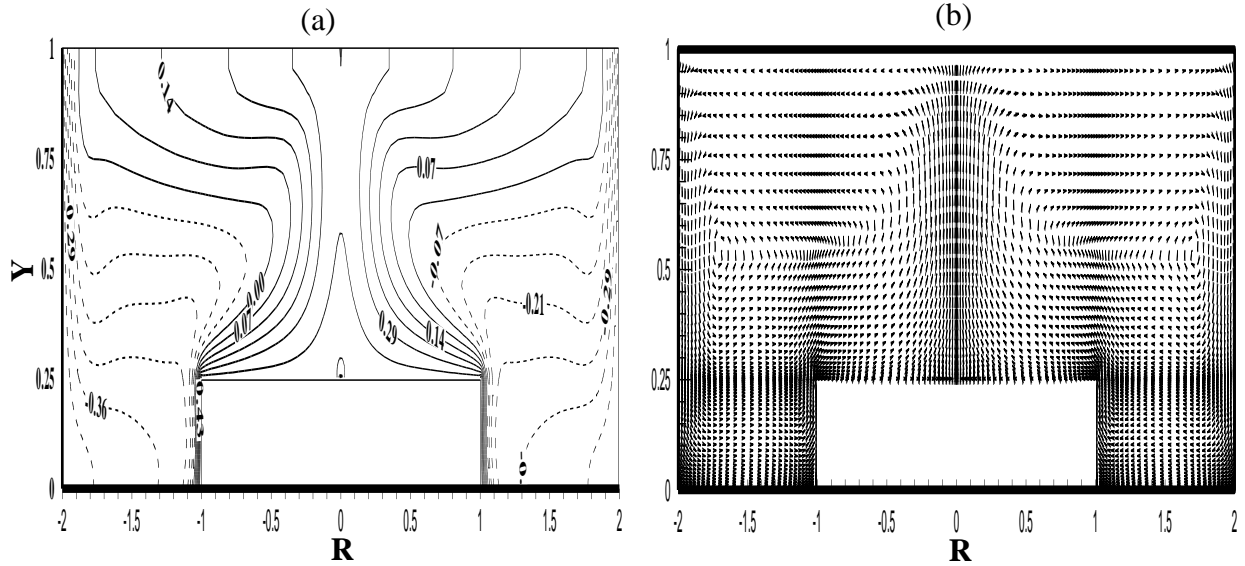


Fig.II.14: Isotherme (a) et champ de vitesses (b) pour $X=0.25$
($Ra=10^5$, $K=2$, $Pr=7.0$)

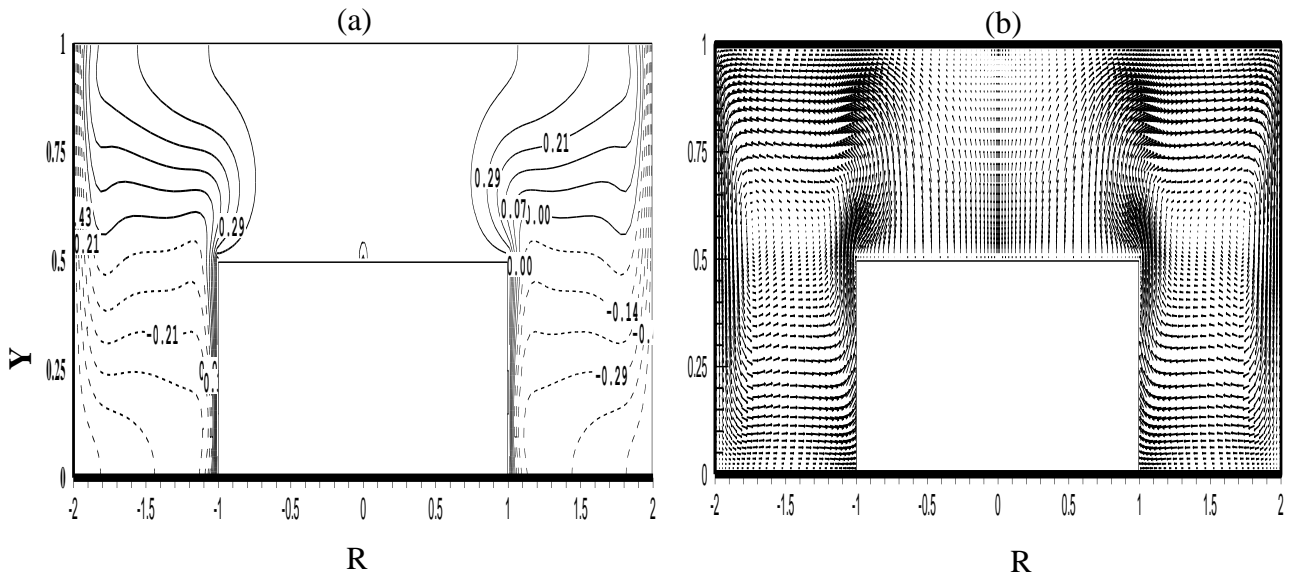


Fig.II.15: Isotherme (a) et champ de vitesses (b) pour $X=0.5$
($Ra=10^5$, $K=2$, $Pr=7.0$)

Lorsque $X=0,25$, on remarque un écoulement très animé dans la zone $(-1 \leq R \leq 1)$ qui provoque un échange thermique important (Fig.II.14a). Par contre lorsque X croît ($0,25 < X < 0,75$), les isothermes ont tendance de s'éloigner de plus en plus dans la zone supérieure du cylindre intérieur $(-1 \leq R \leq 1)$, ce qui traduit une diminution du gradient de température dans cette zone (Fig.II.15a). Lorsque $X=0.75$ (Fig.II.16a), on remarque une stratification de température verticale dans la zone $1 \leq R \leq 2$ et $-2 \leq R \leq -1$, et un gradient nul dans la zone au-dessus du cylindre intérieur. On constate que l'échange thermique convectif augmente avec l'augmentation de la hauteur, car en effet ce transfert de chaleur est animé par un gradient de température établi entre les deux cylindres.

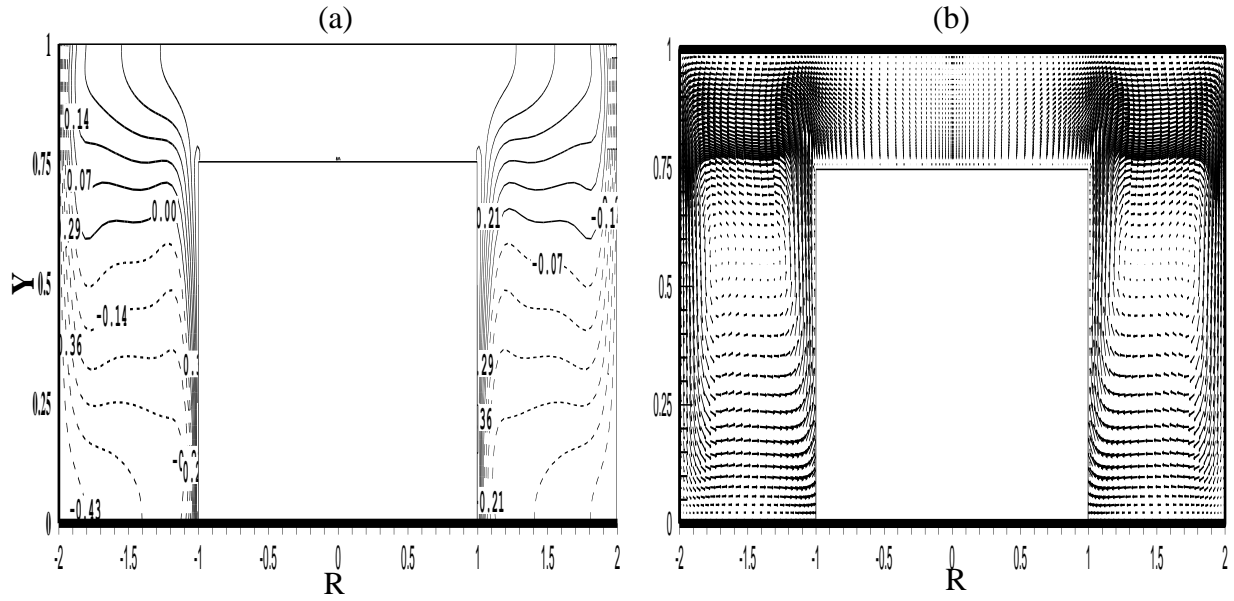


Fig.II.16: Isotherme (a) et champ de vitesses (b) pour $X=0.75$
($Ra=10^5$, $K=2$, $Pr=7.0$)

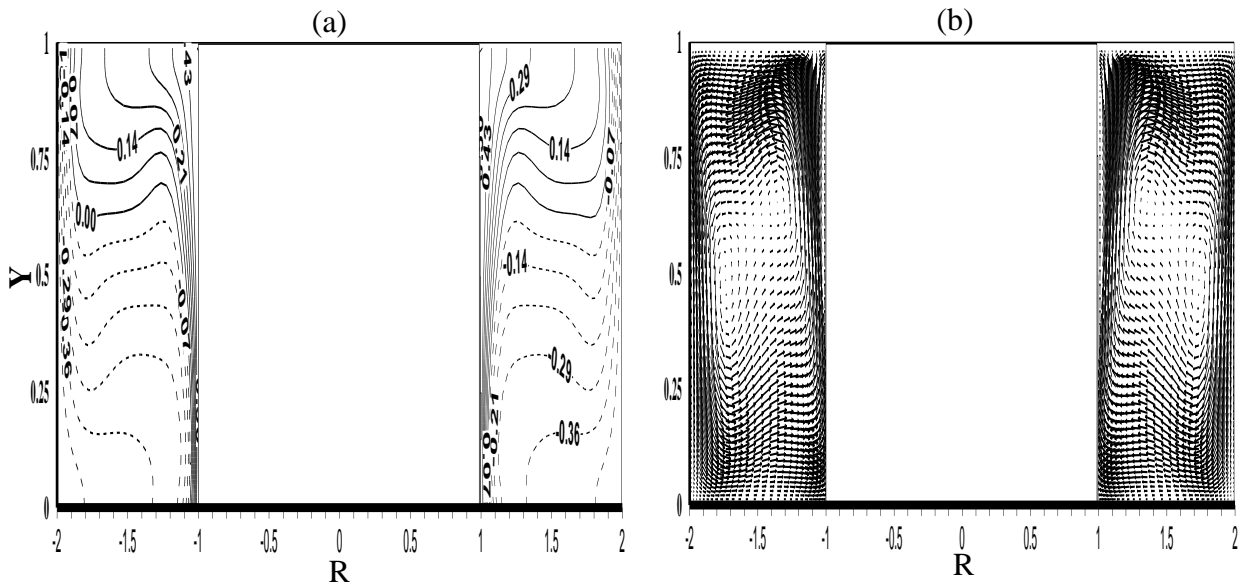


Fig.II.17: Isotherme (a) et champ de vitesses (b) pour $X=1$
($Ra=10^5$, $K=2$, $Pr=7.0$)

Concernant les vitesses, on a vu que pour un rapport de hauteurs compris entre 0,0 et 0,5, les vitesses s'accroissent de plus en plus dans la zone $-1 \leq R \leq 1$ (Fig.II.13b) et (Fig.II.14b), mais lorsque X augmente de 0,75 jusqu'à 1, les particules de fluide s'accroissent totalement dans la partie $-2 \leq R \leq -1$ et $1 \leq R \leq 2$ et elles sont presque nulles dans la zone $-1 \leq R \leq 1$ (Fig.II.16b) et (Fig.II.17b).

II.9.2. Profils des températures et des vitesses:

Les profils de température à $Y=0,8$ pour les faibles rapports de hauteurs ($X=0$ et $X=0,25$) montre également l'existence d'un gradient de température important au centre de la cavité ($-1 \leq R \leq 1$). Ce flux de chaleur est vertical est intense au niveau de la paroi isotherme chaude et au fur et à mesure que la hauteur du cylindre intérieur augmente et on s'approche de la paroi supérieure adiabatique ($0.5 \leq X \leq 1$) le gradient de température s'annule car le flux de chaleur s'effectue principalement au niveau de la zone comprise dans l'intervalle $1 < R < 2$ et symétriquement $-2 < R < -1$.

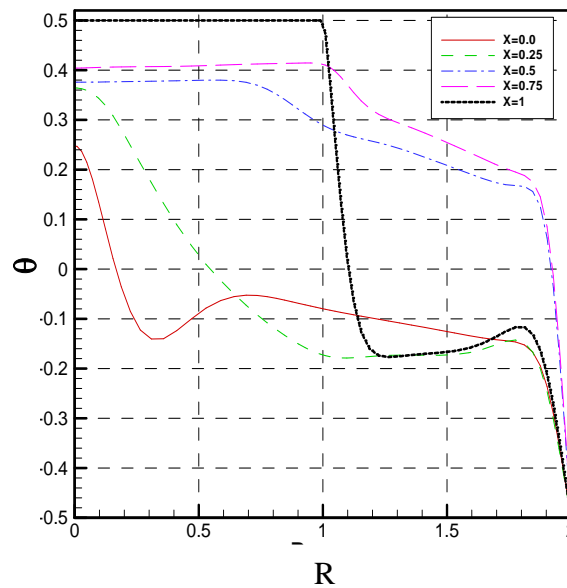


Fig.II.18: profil de la température statique à $Y=0.8$, $Ra=10^5$, $K=2$ pour différents rapports de hauteurs (X).

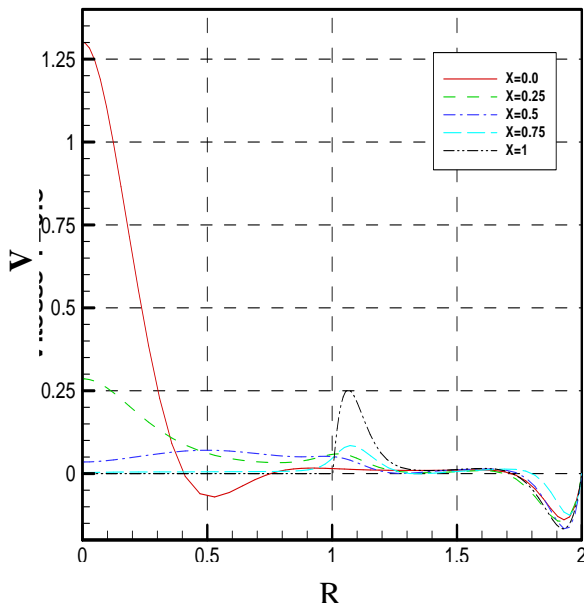


Fig.II.19: profil de la vitesse moyenne (V) à $Y=0.8$, $Ra=10^5$, $K=2$ pour différents rapports de hauteurs (X).

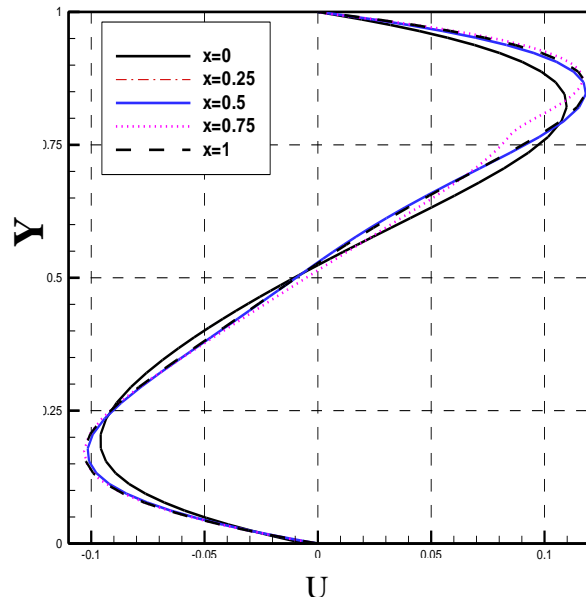


Fig.II.20: profil de la vitesse moyenne (U) à $R=1.65$, $Ra=10^5$, $K=2$ pour différents rapports de hauteurs (X).

Les profils de vitesses verticale (V) à $Y=0,8$ Fig (II.19), montre clairement que plus le rapport de hauteur augmente (X) les vitesses de l'écoulement ascendant, au-dessus du cylindre intérieur, s'affaiblie ($-1 \leq R \leq 1$) et à l'extérieur de cette zone, les particules sont lentes.

Les profils de vitesses horizontales (U) à $R=1,65$ Fig (II.20), montre que l'écoulement près des deux parois horizontale adiabatiques évolue peu avec la variation de rapport de hauteur (X) et conserve la même allure pour différentes valeurs de X.

II.9.3. Transfert de chaleur:

La figure (II.21) montre l'évolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh pour différentes valeurs de hauteurs X. Nous remarquons que pour des valeurs croissantes de X le transfert de chaleur augmente avec l'augmentation de Ra ($10^3 \leq Ra \leq 10^6$), sauf lorsque $X=0.5$ dans un régime bien développé $10^4 \leq Ra \leq 10^6$, on remarque que le transfert de chaleur est maximum, car le cylindre intérieur contribue au transfert thermique à travers deux surfaces, celle de la paroi verticale ($S_1=2.\pi.r_i.h$) et celle de la paroi horizontale supérieure ($S_2=\pi.r_i^2$). L'effet de section horizontal est bien présent lorsque $0 \leq X \leq 0.5$, mais avec une surface verticale faible, et contrairement quand X augmente ($0.75 \leq X \leq 1$), la section horizontale, en s'approchant de la paroi adiabatique, devient de plus en plus isolé et ne contribue plus au transfert thermique car le fluide dans cette zone est immobile.

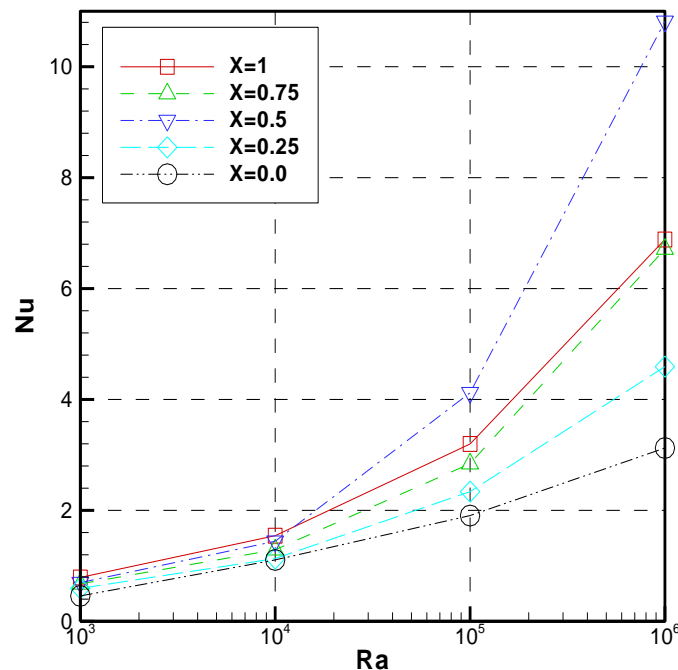


Fig.II.21: Nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh pour différentes valeurs X.

On peut voir ça clairement sur la figure (II.22) qui montre l'évolution du nombre de Nusselt en fonction du rapport de hauteur X pour différentes valeurs du nombre du Rayleigh.

Il est évident que le transfert convectif croît avec l'accroissement du nombre de Rayleigh, mais nous avons un écoulement faible lorsque $Ra=10^3$ et $Ra=10^4$ et où le transfert convectif est faible car le nombre de Nusselt reste constant pour plusieurs valeurs de X , par contre lorsque les forces de poussée thermique deviennent plus importantes $Ra=10^5$ et $Ra=10^6$ l'augmentation du nombre de Nusselt est avec l'existence d'un maximum lorsque $X=0,5$.

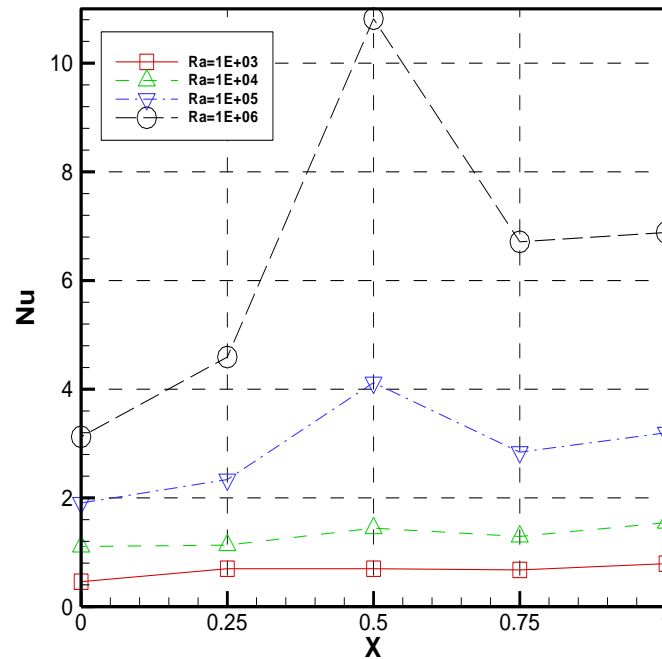


Fig.II.22: Nombre de Nusselt en fonction du rapport de hauteur X pour différentes valeurs Rayleigh

II.10. Influence du rapport de courbure:

Le rapport des rayons (K) est un nombre adimensionnel qui caractérise la géométrie de la cavité et qui représente le rapport du rayon du cylindre extérieur sur le rayon du cylindre intérieur.

II.10.1. Structure d'écoulement:

Pour mettre en évidence l'effet du rapport des rayons des deux cylindres, nous avons considéré différentes valeurs de K entre 2 et 10 pour $Ra=10^5$, $X=0,5$, $Pr=7,0$.

En observant les isothermes de la figure (II.25a), lorsque $K=2,0$, on constate que le flux de chaleur est horizontale, à travers les couches limites thermiques au niveau des deux parois verticales, ensuite il devient vertical descendant à travers une stratification verticale au fur et à mesure qu'on s'approche du milieu ($R=1,5$) avec un gradient de température faible. Par contre

lorsque le rapport de rayons augmente $K=5$ et $K=10$ Figure (II.23a) et Figure (II.24a), on remarque un gradient de température très important au niveau de la paroi chaude et un gradient de température plus faible au niveau de la paroi froide lorsque le rapport K augmente ce qui montre que le fluide s'échauffe mieux lorsque le rapport des rayons est faible ($K=2$).

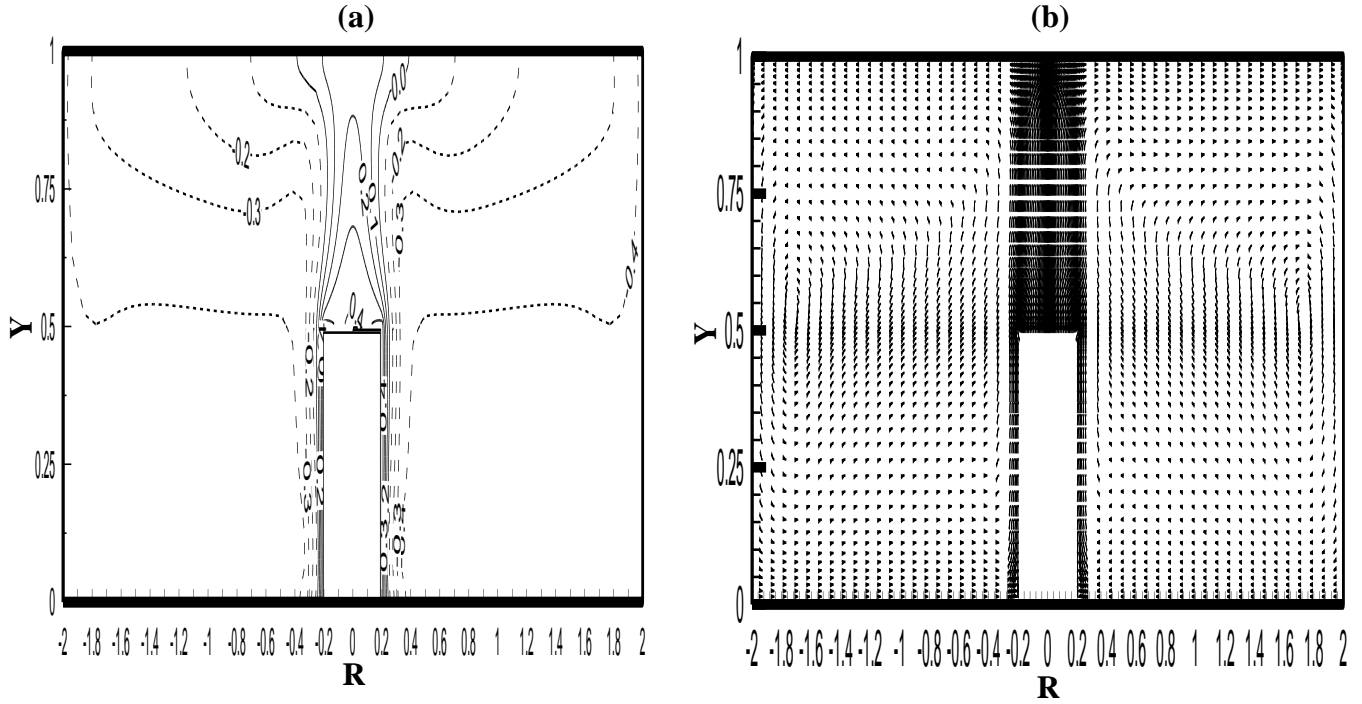


Fig.II.23: Isotherme (a) et champ de vitesses (b) pour $K=10$
($Ra=10^5$, $X=0.5$, $Pr=7.0$)

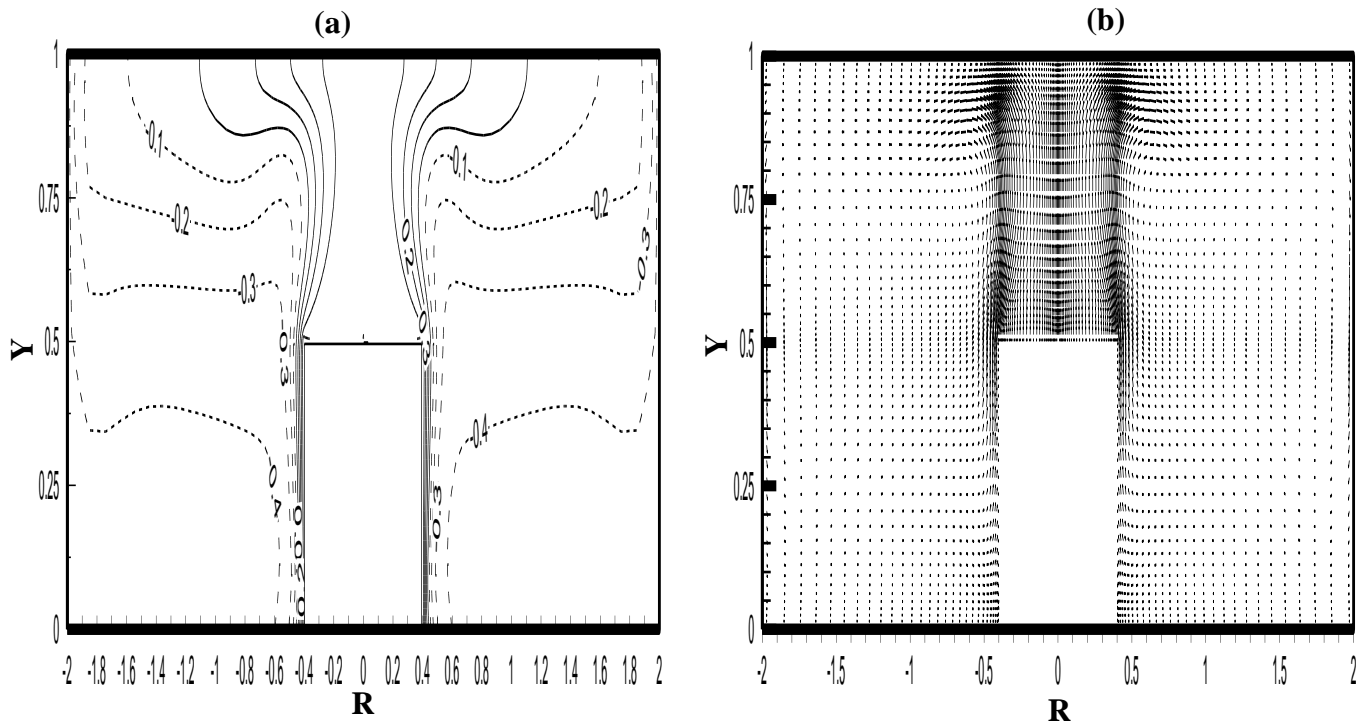


Fig.II.24: Isotherme (a) et champ de vitesses (b) pour $K=5$
($Ra=10^5$, $X=0.5$, $Pr=7.0$)

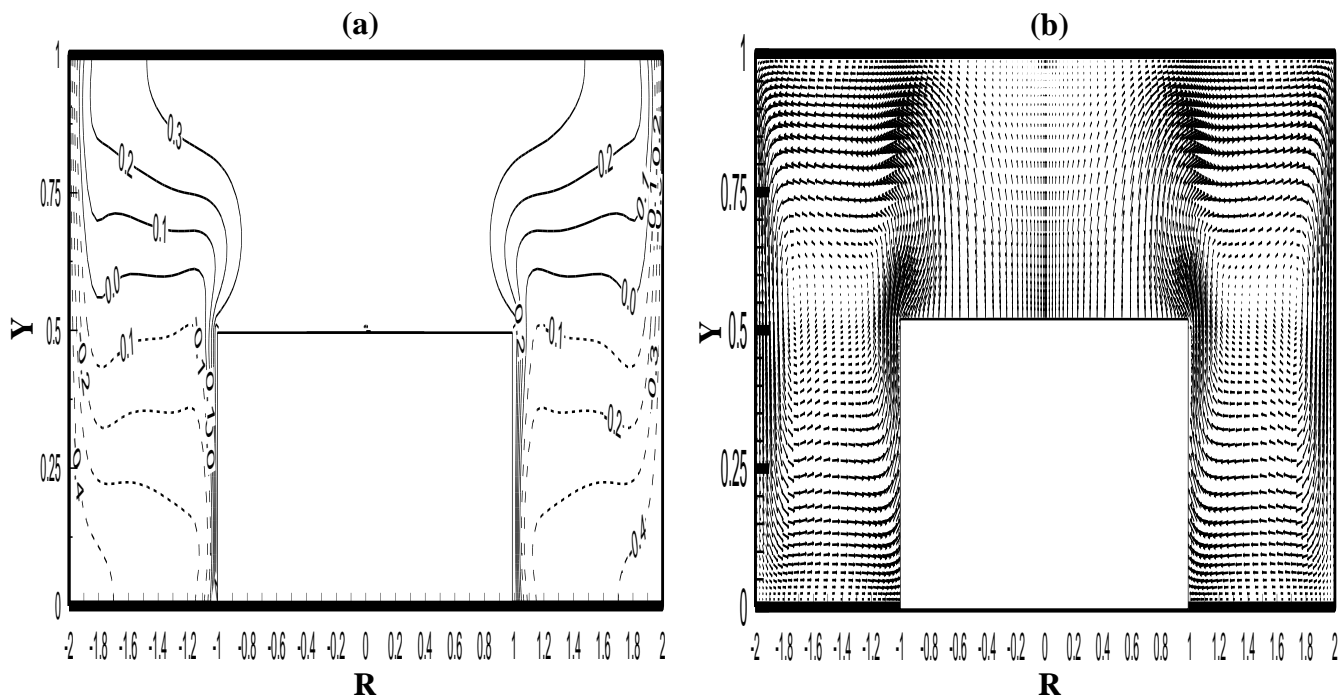


Fig.II.25: Isotherme (a) et champ de vitesses (b) pour $K=2$
 $(Ra=10^5, X=0.5, Pr=7.0)$

On peut voir également à travers la figure (II.25a) qu'une zone isotherme s'installe au-dessus du cylindre intérieur au fur et à mesure que le rapport des rayons diminue.

II.10.2. Distribution de température et champ de vitesse pour différents nombres de Rayleigh:

Nous avons étudié l'influence du rapport de rayons (K) sur la distribution de température et le champ de vitesse. Pour chaque valeur du rapport de rayons nous avons fixé le rapport de hauteur (X) à 0.5 et nous avons fait varier le nombre de Rayleigh de 10^3 à 10^6 , pour un nombre de Prandtl=7,0.

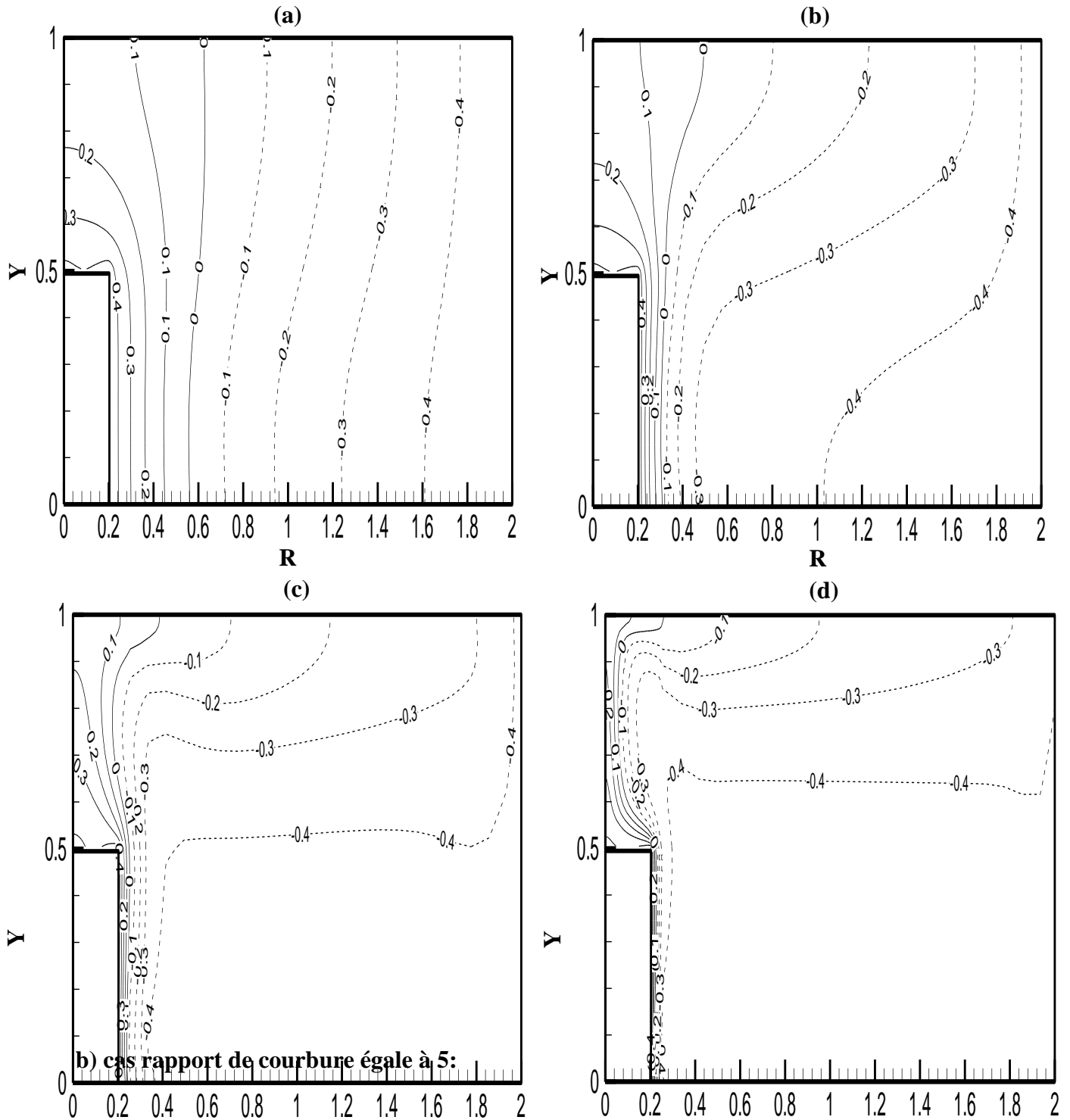
Dans les figures (II.26), (II.27) et (II.28) des structures d'écoulement et des champs de température sont obtenus pour mettre en évidence les effets du nombre de Rayleigh et le rapport des rayons $K=r_o/r_i$.

Pour les faibles valeurs du nombre de Rayleigh ($Ra=10^3$), l'écoulement généré par le gradient de température entre les deux parois isothermiques, dans tous les cas où $K=2, 5, 10$ l'écoulement est faible et conduit à un transfert de chaleur en régime conductif (Fig.II.26a, 27a, 28a). Mais, lorsque le nombre de Rayleigh augmente au-delà de $Ra=10^4$, le gradient de température est assez puissant pour provoquer un écoulement convectif. Effectivement, on voit sur la figure (II.31b), pour $Ra=10^4$ et $K=2$ un écoulement ascendant accéléré au niveau de

la paroi chaude et descendant lent près de la paroi froide du cylindre en formant un fort gradient thermique près de la paroi chaude et faible près de la paroi froide.

Lorsque K augmente on constate que les isothermes sont très serrées au niveau de la paroi chaude et plus en plus séparé au niveau de la paroi froide Fig (II.26) et Fig. (II.27).

a) cas rapport de courbure égale à 10:



R **R**
Fig.II.26: Effet du nombre de Rayleigh sur le champ de température
 $Ra=10^3$ (a), $Ra=10^4$ (b), $Ra=10^5$ (c), $Ra=10^6$ (d)
($K=10$, $X=0.5$, $Pr=7.0$)

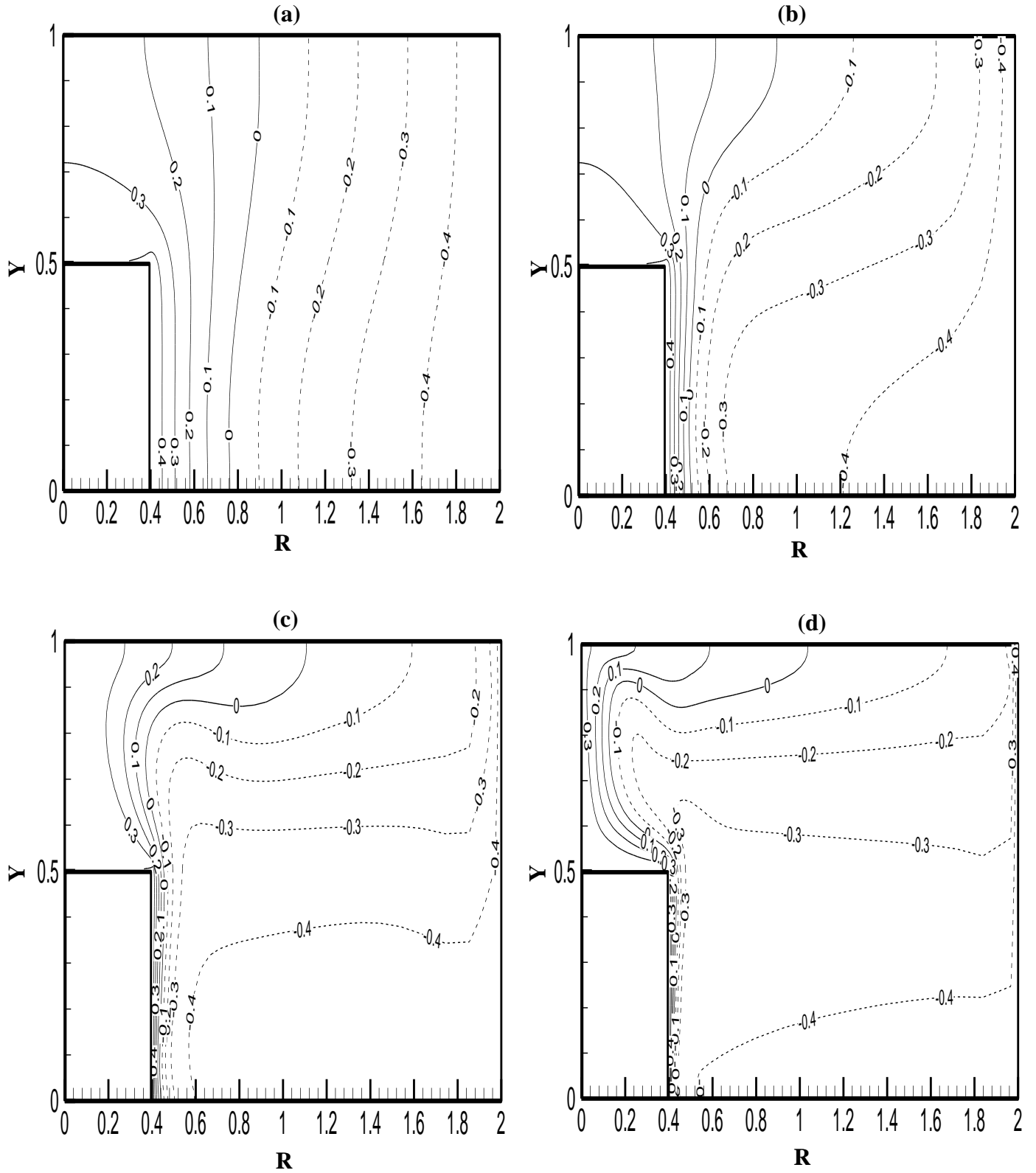


Fig.II.27: Effet du nombre de Rayleigh sur le champ de température $Ra=10^3$ (a),
 $Ra=10^4$ (b), $Ra=10^5$ (c), $Ra=10^6$ (d)
 ($K=5$, $X=0.5$, $Pr=7.0$)

c) cas rapport de courbure égale à 2:

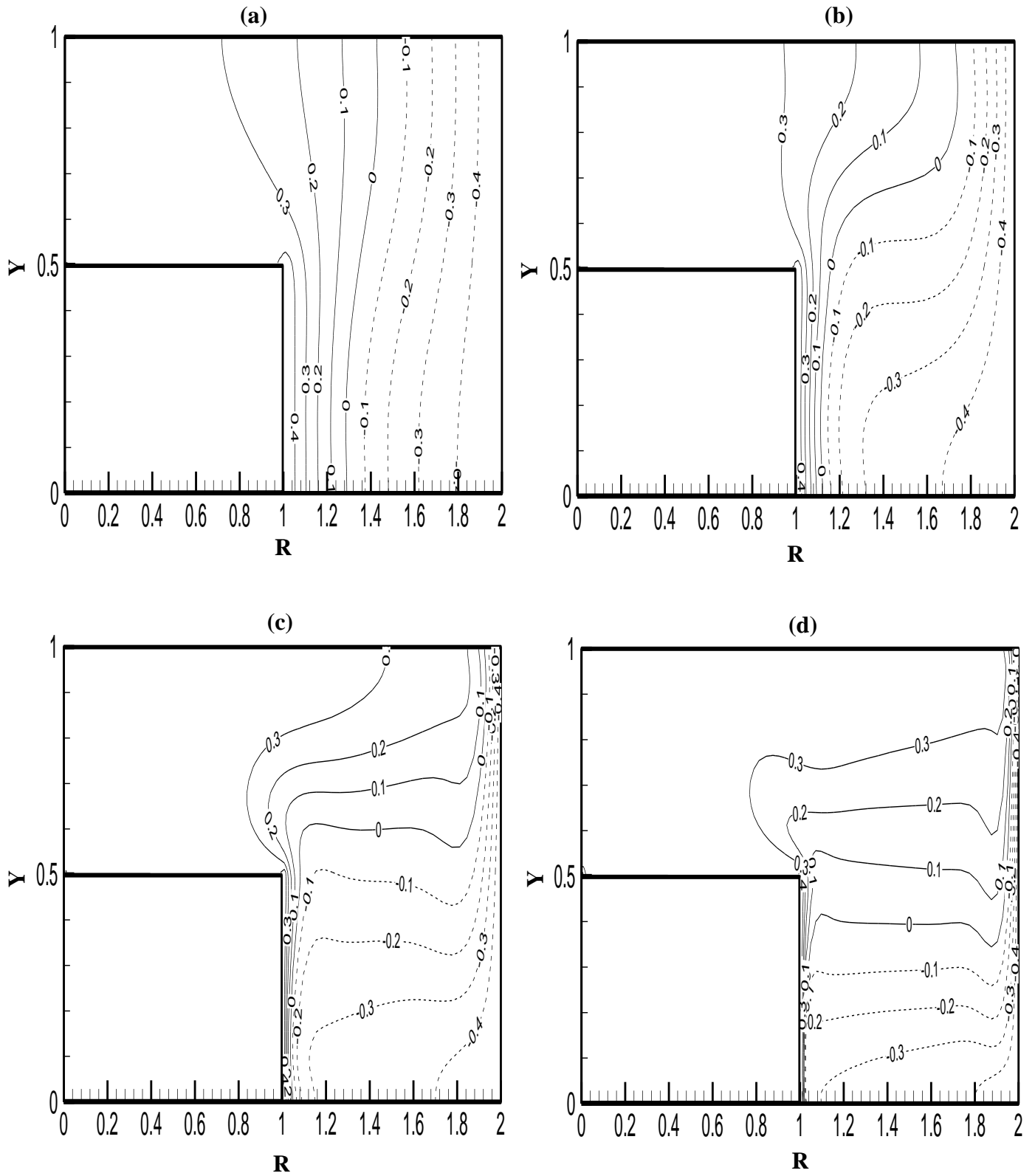


Fig.II.28: Effet du nombre de Rayleigh sur le champ de température $Ra=10^3$ (a), $Ra=10^4$ (b), $Ra=10^5$ (c), $Ra=10^6$ (d)
($K=2$, $X=0.5$, $Pr=7.0$)

d) cas rapport de courbure égale à 10:

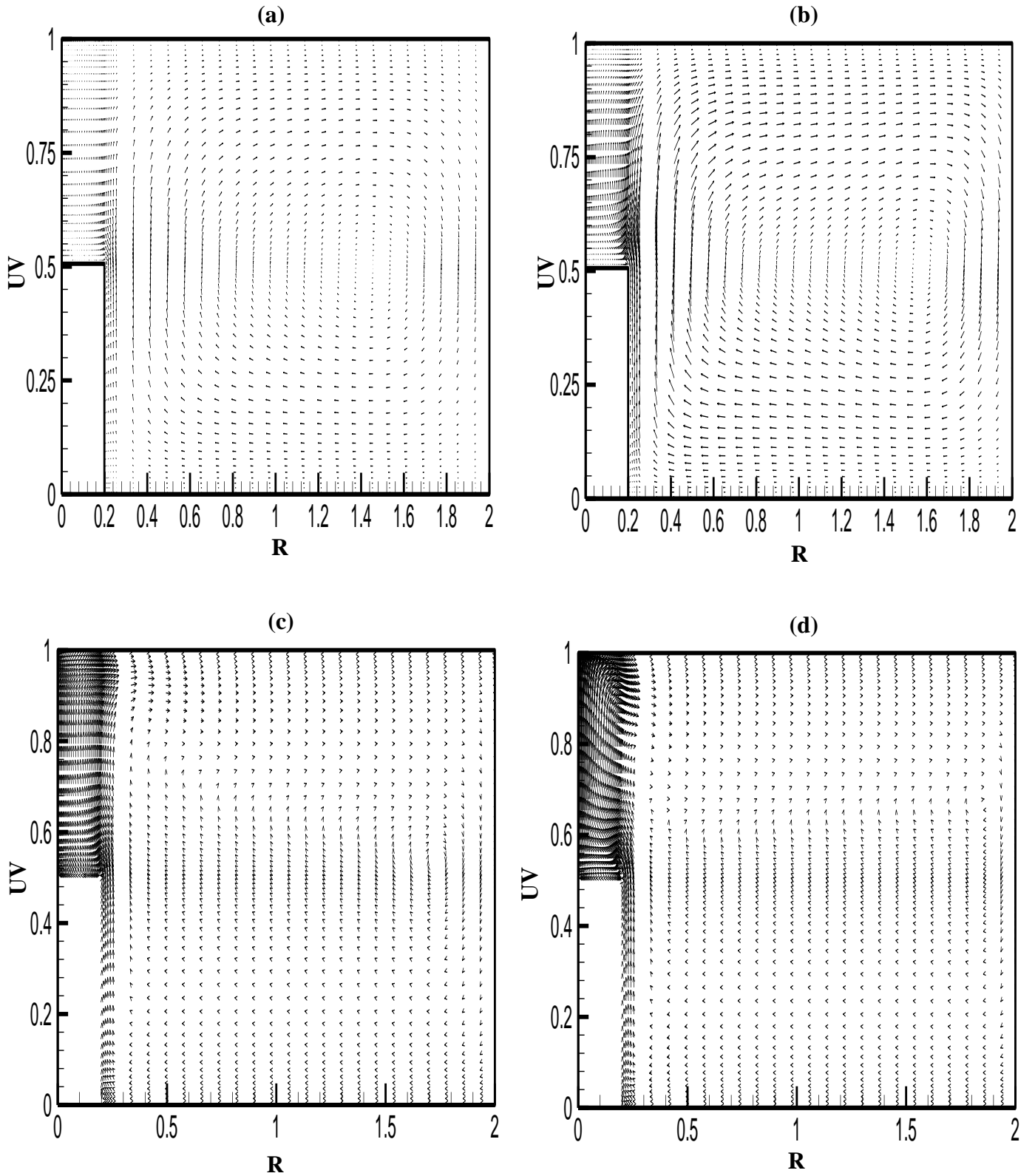


Fig.II.29: Effet du nombre de Rayleigh sur le champ de vitesse
 $Ra=10^3$ (a), $Ra=10^4$ (b), $Ra=10^5$ (c), $Ra=10^6$ (d)
 (K= 10, X =0.5, Pr=7.0)

e) cas rapport de courbure égale à 5:

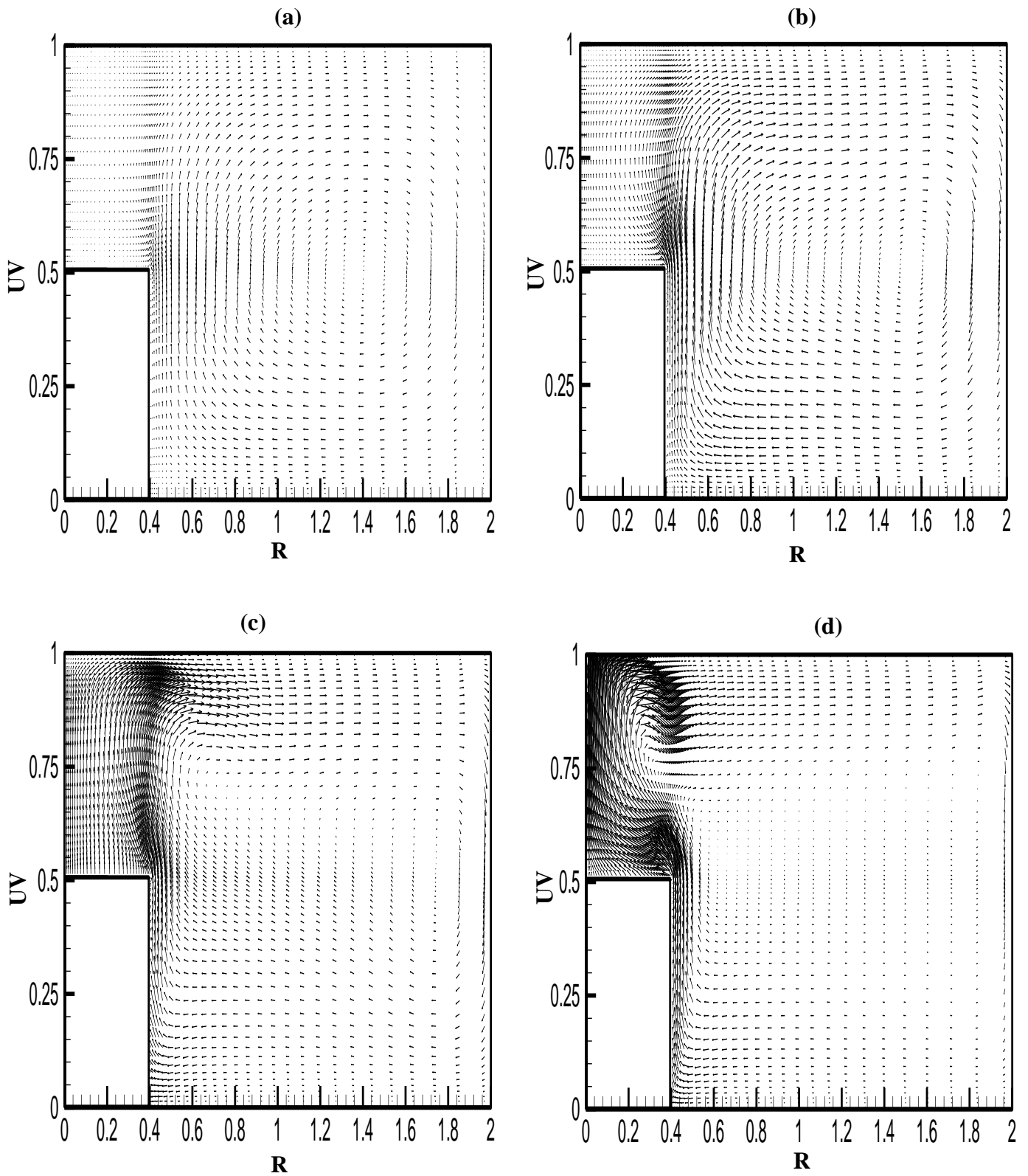


Fig.II.30: Effet du nombre de Rayleigh sur le champ de vitesse
 $Ra=10^3$ (a), $Ra=10^4$ (b), $Ra=10^5$ (c), $Ra=10^6$ (d)
 ($K=5$, $X=0.5$, $Pr=7.0$)

f) cas rapport de courbure égale à 2:

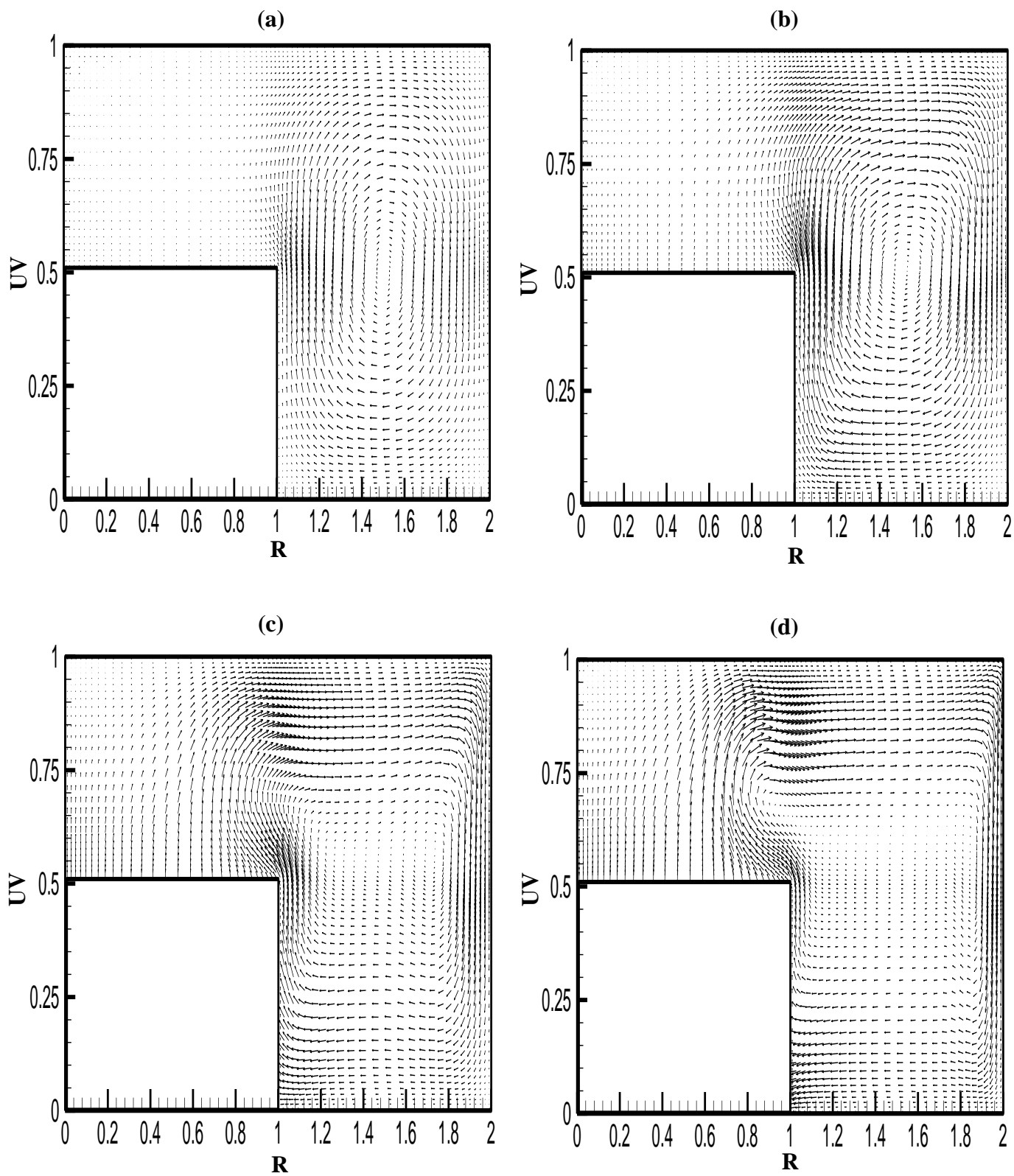


Fig.II.31: Effet du nombre de Rayleigh sur le champ de vitesse
 $Ra=10^3$ (a), $Ra=10^4$ (b), $Ra=10^5$ (c), $Ra=10^6$ (d)
 ($K=2$, $X=0.5$, $Pr=7.0$)

II.10.3. Profils des températures et des vitesses:

Les profils de température à $Y=0,8$ pour différents rapports de rayons (K) (fig.II.32) montre que la température décroît avec l'augmentation du rapport K , cette diminution est différente en trois zones: ($0 \leq R \leq 0,7$) la température diminue sauf pour $K=2$, car la paroi supérieure du cylindre intérieur est assez grande pour imposer une zone isothermique entre les deux parois supérieures des deux cylindres. Pour $K=5$ et 10 le gradient de température est constant (même pente). Pour $0,7 \leq R \leq 1,85$, la diminution de température est lente qui traduit l'existence d'un gradient de température faible et constant pour les trois valeurs de $K=2, 5$ et 10. Pour $1,85 \leq R \leq 2$, une chute rapide de la température explique la présence d'un gradient de température important près de la paroi froide, par contre ce gradient de température est inversement proportionnelle au rapport des rayons K , c'est-à-dire que le gradient de température est important lorsque K est faible.

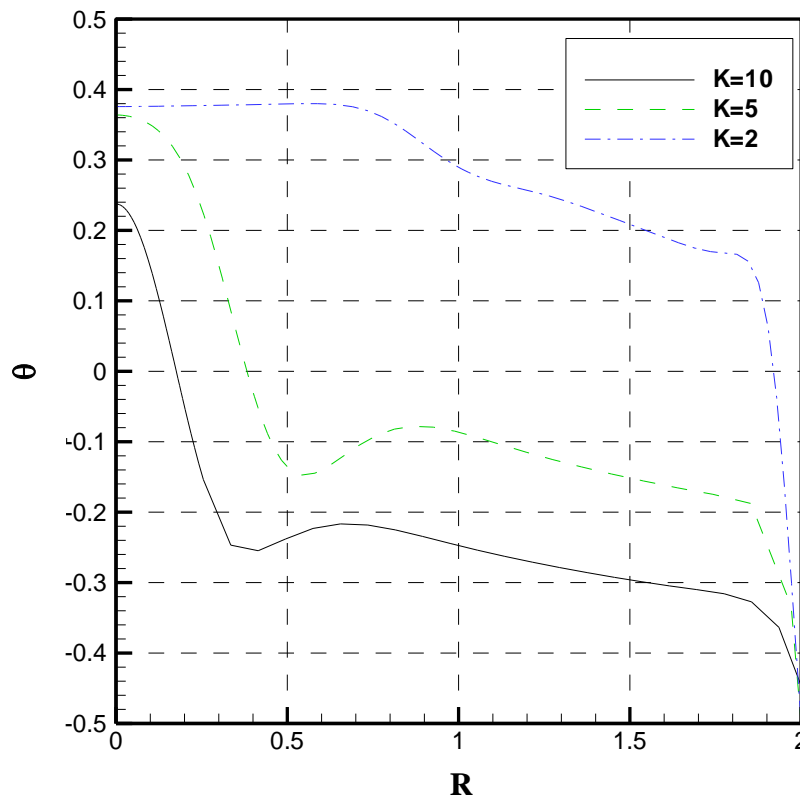


Fig II.32: profil de la température statique à $Y=0.8$, $Ra=10^5$, $X=0.5$ pour différents rapports de courbures (K).

Les profils de vitesses verticale (V) à $Y=0,8$ Fig. (II.33), montre clairement que plus le rapport des rayons augmente (K) les vitesses de écoulement ascendant au niveau de l'axe de symétrie s'accroissent et atteignent une valeur maximale égale à 0,35 pour $K=10$ ($-0,5 \leq R \leq 0,5$) et par contre à l'extérieure de cette zone près de paroi froide $R=2$ les particules de l'écoulement

descendant sont lentes et décroissent avec la croissance de rapport de rayons, cela est due à la conservation de quantité de mouvement et de l'inégalité des surfaces des parois isothermiques

Les profils de vitesses horizontales (U) à $R=1,65$ Fig. (II.34), on constate que pour $K=5$ la vitesse est maximale $U \sim 0,17$ près de la paroi adiabatique supérieure et $U \sim -0,15$ près de la paroi adiabatique inférieure, par contre pour $K=2$ les vitesses diminuent et atteignent une valeur minimale pour $K=10$, $U \sim 0,09$ pour $H \sim 0,85$. Cela, peut être expliqué par la transition d'un écoulement accéléré ascendant pour un fort rapport K vers un écoulement lent descendant pour un fort rapport K .

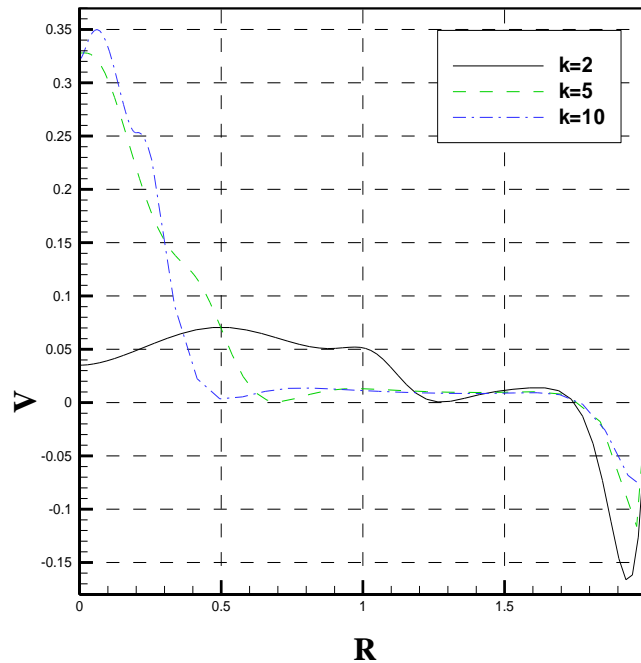


Fig II.33: profil de la vitesse moyenne (V) à $Y=0,8$, $Ra=10^5$, $X=0,5$ pour différents rapports de courbures (K).

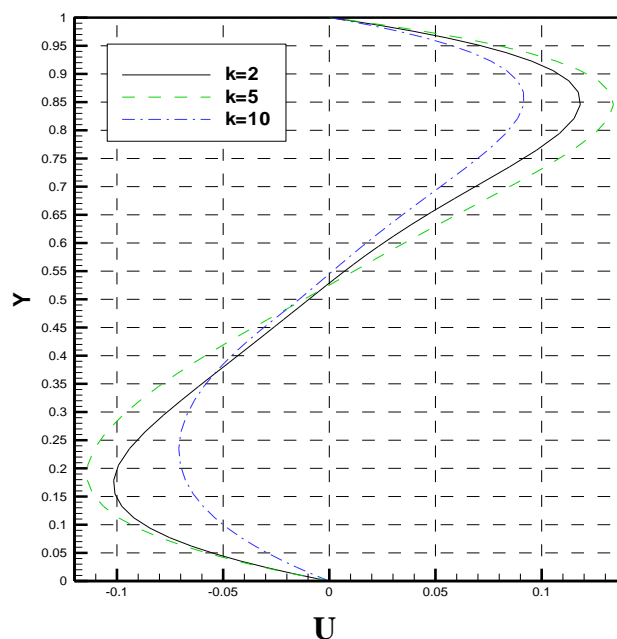


Fig II.34: profil de la vitesse moyenne (U) à $R=1,65$, $Ra=10^5$, $X=0,5$ pour différents rapports de courbures (K).

II.10.4. Transfert de chaleur:

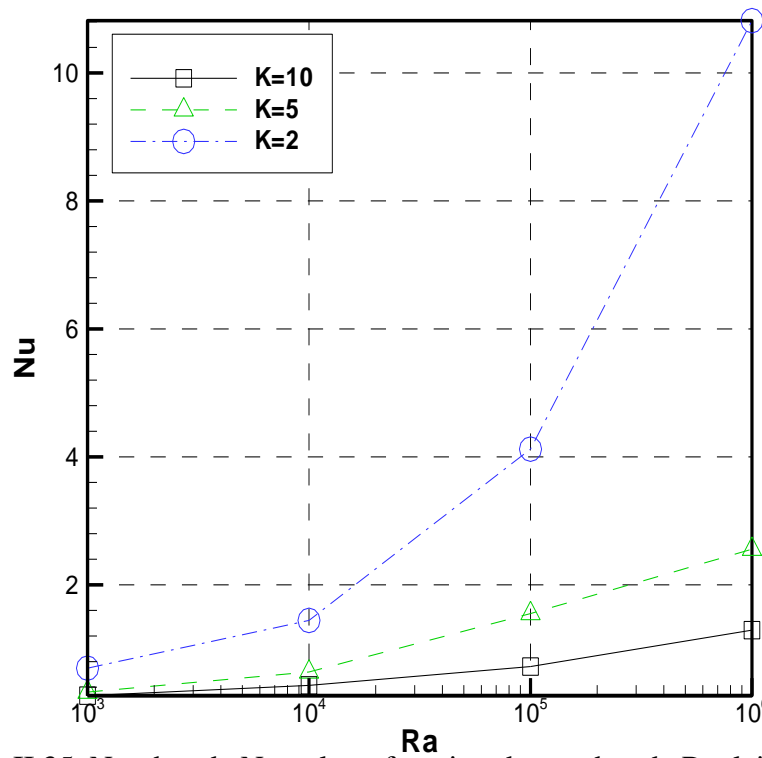


Fig II.35: Nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh pour différentes valeurs K.

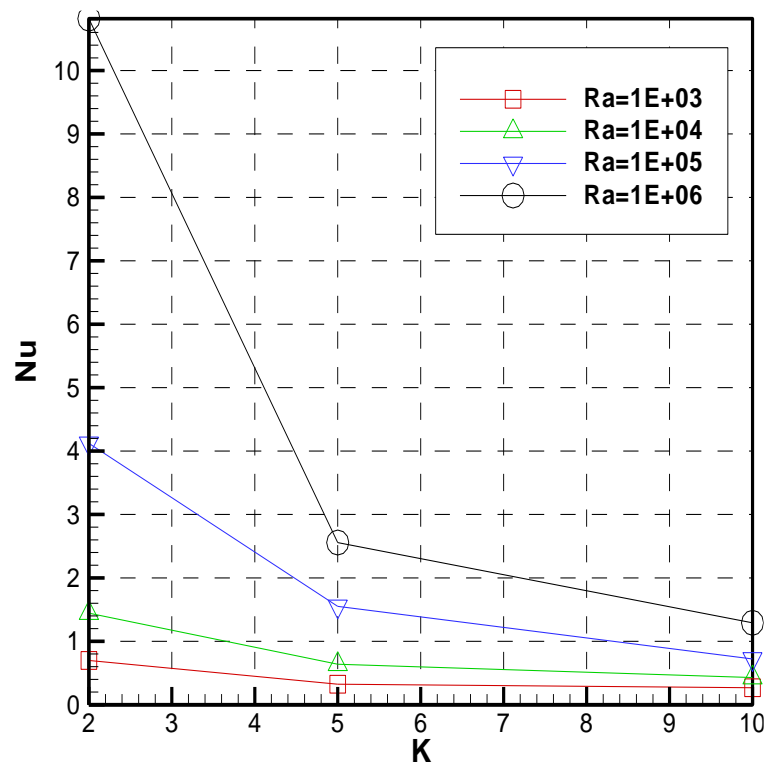


Fig.II.36: Nombre de Nusselt en fonction du rapport de courbure K pour différentes valeurs Rayleigh

La figure (II.35) montre l'évolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh. Nous remarquons que pour toutes les valeurs de K , le transfert de chaleur augmente lorsque le nombre de Rayleigh augmente. Donc, il est évident que plus la surface chauffée augmente, plus le transfert de chaleur devient important.

La figure (II.36) représente le transfert de chaleur en fonction du rapport des rayons K . Nous remarquons que le nombre de Nusselt décroît avec l'augmentation de K cela signifie que le transfert de chaleur diminue lorsque la surface de la paroi chaude diminue (augmentation de K) et cela pour n'importe quelle valeur du nombre de Rayleigh.

II.11. Conclusion:

Ce travail a essentiellement pour objectif d'étudier la convection naturelle dans une cavité cylindrique verticale partiellement annulaire, pour contribuer, avec des résultats numériques, aux études liées aux écoulements de convection naturelles dans les cavités fermées.

Nous avons mis au point pour cela un modèle numérique basé sur la méthode des volumes finies pour résoudre les équations de Navier-Stokes qui gouvernent ce type d'écoulement, et nous avons étudié l'influence des différents paramètres sur l'écoulement, tel que l'effet du nombre de Rayleigh (Ra) et le rapport de hauteur (X) et le rapport de rayons (K), qui caractérisent le problème sur le transfert de chaleur. Nous avons envisagé plusieurs études pour traiter le phénomène de la convection naturelle.

Nous avons mis en évidence l'effet du nombre de Rayleigh sur le comportement des structures d'écoulements et du champ de température et du champ de vitesse en régime stationnaire. Deux régimes d'écoulements ont été observés, un conductif et l'autre convectif selon la valeur du nombre de Rayleigh, ce qui signifie un échange thermique convectif croissant avec l'accroissement du nombre de Rayleigh.

Nous avons également mis en évidence l'effet de la géométrie sur la structure d'écoulement, où nous avons étudié l'effet du rapport des hauteurs sur la structure de l'écoulement et sur la distribution de température. L'analyse du transfert de chaleur, nous a permis de trouver une hauteur optimale du cylindre intérieur situé à mi-hauteur du cylindre extérieur qui favorise le transfert de chaleur.

Enfin, nous avons étudié l'influence du rapport des rayons (K), les résultats obtenus nous ont montrés que la variation du rapport des rayons K influence considérablement le transfert de chaleur, ainsi, le transfert de chaleur est favorable pour un faible rapport des rayons sur la structure de l'écoulement et sur la distribution de température.